

Un recueil du XIII^e siècle de problèmes mathématiques

Jacques Sesiano

*Département de Mathématiques
Ecole polytechnique fédérale*

I Introduction

I.1 Généralités

Dans le domaine de l'algèbre, l'Europe médiévale n'a pas profité autant qu'elle aurait pu le faire des richesses mathématiques que lui offrait l'Espagne reconquise. D'abord, la traduction de l'Algèbre d'al-Khwārizmī, si elle servit de point de départ, ne fut de loin pas aussi employée que la traduction de son Arithmétique, objet de commentaires et d'adaptations, grâce auxquels le nom du savant persan devint synonyme de procédé opératoire. L'influence de deux recueils de problèmes, le *Liber augmenti et diminutionis* d'Abraham (Ibrahim) et le *Liber mensurationum* d'Abū Bakr, qui résout par l'algèbre certains problèmes de nature géométrique, fut également très modérée. Quant au traité d'Algèbre d'Abū Kāmil, dont on sait qu'il joua un rôle primordial dans l'occident musulman plus encore que dans l'orient, il ne fut traduit qu'au XIV^e siècle et eut au mieux un seul lecteur.¹

De plus, les possibilités de l'Espagne au XII^e siècle ne se limitaient pas à ces quelques textes. Ainsi, profitant de sa connaissance de l'arabe et de son accès aux sources, le traducteur Johannes Hispalensis a aussi composé des ouvrages qui sont originaux —même s'ils apparaissent profondément influencés par leurs précurseurs arabes—, dont le plus important est le *Liber mahameleth*, vaste exposition de l'arithmétique et de l'algèbre dans son application à la science du commerce (une branche

¹Le *liber mensurationum* a été édité par H. Busard dans le *Journal des Savants* de 1968, pp. 65–124, le précédent par G. Libri dans son *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (Paris 1838), I, pp. 304–371. L'Algèbre d'al-Khwārizmī s'y trouve aussi, pp. 253–297 (autre édition par B. Hughes, in: *Mediaeval Studies*, 48 (1986), pp. 211–263). L'Arithmétique d'al-Khwārizmī (dont seul le texte latin est conservé) apparaît en transcription, avec reproduction du manuscrit en regard, dans K. Vogel, *Alchwarizmi's Algorismus* (Aalen 1963); une seconde traduction latine vient d'être publiée par M. Folkerts dans les *Abhandlungen der bayerischen Akademie der Wissenschaften*, Philos.–histor. Klasse, N. F., Heft 113 (Munich 1997). Quant à la version latine de l'Algèbre d'Abū Kāmil, elle apparaît dans *Vestigia mathematica* (edd. M. Folkerts & J. Hogendijk, Amsterdam 1993), pp. 325–420, 234–252, 448–451.

appelée en arabe *mu'āmalāt*).² Quoique cet ouvrage fût unique en son genre au XII^e siècle, il ne laissa que des traces insignifiantes, guère plus en fait que quelques fugitives mentions à la fin du Moyen Âge: rapidement tombé dans l'oubli, il en venait ainsi à partager le sort des traductions de textes algébriques restées peu utilisées.

C'est que le XIII^e siècle voit l'algèbre trouver une nouvelle patrie. L'Italie tiendra en effet désormais une position dominante, tant pour l'entretenir que pour le développer, et ceci jusqu'au XVI^e siècle. Elle doit cette impulsion initiale à l'activité d'un seul savant qui, lui aussi, avait profité d'un accès direct aux sources en arabe, mais avait eu, contrairement aux mathématiciens d'Espagne, la possibilité de voyager dans l'Orient musulman: Léonard Fibonacci. Il n'est guère d'ouvrage d'algèbre, durant les trois siècles jusqu'à Renaissance, dans lequel on ne retrouve des problèmes repris directement ou inspirés de ceux du *Liber abaci* du mathématicien pisan.

Les textes algébriques originaires d'Espagne ont laissé si peu de traces que l'on se trouve ravi de constater que quelqu'un a pris la peine d'en feuilleter certains et d'en recopier des parties. C'est un tel recueil, conservé aux fol. 53^r–67^r du manuscrit *latin 15120* de la Bibliothèque Nationale de Paris, qui fera l'objet de cette étude. Mais remarquons d'emblée que la question de l'influence ou des traces ultérieures n'en recevra pas plus de réponse: l'auteur de l'extrait était visiblement une personne fort peu compétente, brochant sa copie sur du parchemin de qualité médiocre, et les quelques lecteurs de cet extrait n'ont fait qu'ajouter des notes de moindre importance. Le plus intéressé d'entre eux fut sans doute celui qui, apparemment déjà au XVI^e ou au XVII^e siècle, ne résista pas à l'envie d'emporter avec lui les fascicules qui en formaient la première moitié.

I.2 Description du manuscrit

Le manuscrit *latin 15120* de la Bibliothèque Nationale de Paris, provenant du fonds de l'Abbaye de Saint-Victor, est un recueil de traités de nature mathématique transcrits par diverses mains, toutes du XIII^e siècle semble-t-il.³ Si l'on fait abstraction des feuillets de garde en papier, ajoutés lors du dernier travail de reliure durant le dix-neuvième siècle, les feuillets sont tous de parchemin. Ils ont un petit format, assez uniformément de 140 sur 95 mm., excepté pour la partie éditée ci-après, dont les feuillets diffèrent fortement en dimension (entre 140 & 100 mm. pour la hauteur et 90 & 70 mm. pour la largeur), de même du reste qu'ils diffèrent beaucoup dans la qualité du parchemin utilisé.

Les feuillets du manuscrit portent la marque de deux numérotations. La première

²On en trouvera un résumé dans les *Actes du Colloque international d'Alger sur l'histoire des mathématiques arabes* (Alger 1988), pp. 69–98. Voir aussi l'indication des sections en fin de cette étude, Appendice B.

³Succinctement décrit par L. Delisle dans son *Inventaire des manuscrits latins conservés à la Bibliothèque Nationale sous les numéros 8823–18613* (Paris 1863–71).

est à l'encre, et doit remonter au XV^e siècle; elle a été employée à la même époque, lors de l'établissement d'une table des matières du manuscrit (v. ci-après). Au dix-neuvième siècle, les feuillets ont été numérotés une nouvelle fois au crayon, laquelle numérotation a été répétée à l'encre rouge lors d'une inspection du manuscrit en 1888.

Si ces deux derniers foliotages ne font que se répéter, leur comparaison avec la numérotation ancienne est instructive. Elle nous apprend surtout, du fait de sa discontinuité, la perte de quelques cahiers, qui occupaient les fol. 50^r–58^v et 62^r–77^v du manuscrit originel. Ensuite, elle permet de constater que la position de certaines feuilles a été entre-temps modifiée: le folio 1, qui contenait la table des matières susmentionnée, apparaît maintenant à la fin (fol. 77 actuel); les places des feuilles 80 et 81 ont été échangées (fol. 56 resp. 55); enfin, les pages blanches de la fin du manuscrit ont été retournées, en sorte que leurs numéros se trouvent à présent au bas des fol. 75^v & 76^v.

Tenant compte de ceci, on peut décrire le contenu actuel du manuscrit en le comparant avec le contenu ancien tel qu'il est mentionné dans la table des matières du XV^e siècle (l'ancienne numérotation est indiquée entre crochets):

Fol. 1^r–37^v [2^r–38^v]: *Liber Radulfi Laudunensis de abaco*; édité, selon ce manuscrit, par A. Nagl, «Der arithmetische Tractat des Radulf von Laon», in: *Zeitschrift für Math. u. Phys.* (hist.–lit. Abt., Suppl.), 34 (1890), pp. 87–133.

Fol. 38^r–40^v [39^r–41^v]: blancs.

Fol. 41^r–46^r [42^r–47^r]: *De semitonio* (dont l'auteur est probablement Raoul de Laon; v. Nagl, *op. cit.*, p. 87), (inc.) “Quoniam et Macrobbii et Platonis auctoritate CCLVI ad CC^{ta}XLIII comparatis semitonii proportionem compleri accepimus”, (expl.) “in minoribus numeris quam in XXXMDCCCXX et in XXXIIMDCCCXX et in XXXIIMDCCCV maioris semithonii proportionem minime posse per integros explicari”.

Fol. 46^v–48^v [47^v–49^v]: blancs.

[Fol. 50^r seqq; **en déficit**]: *Glose super tabulam compoti*.

Fol. 49^r–52^r [58^r–61^r]: (Sur la *perfecta pyramis*; incomplet de la fin), (inc.) “(S)it tabula ad latitudinem et longitudinem distincta campis, id est in latitudine VIII, in longitudine XIII, ita ut inter duos eosdem septenarios mediastina linea interponatur, que direptoria vel divisoria appellatur. Super hanc tabulam alterutra ex parte disponantur in ultimis locis omnes species trium generum, id est multiplicis, superparticularis et superpartientis”, (50^r, 17:) “sed memor trium preceptorum Boetii”, (expl.) “supertripartiens est cum maior numerus continet minorem et insuper eius III partes, ut sunt XLVIII ad XXVIII, nam XLVIII habet XXVIII in se et insuper eius III partes, id est III septenarios. Superquatripartiens est qui habet alium totum et eius quintam partem quater, ut LXXXI ad XLV. Superquinquapartiens est < >”.

Fol. 52^v [61^v]: blanc.

Fol. 53^r–67^r [62^r–77^v, actuellement en déficit; 78^r–92^r]: Recueil de problèmes ex-

traits de divers traités, dont la partie conservée est publiée dans cette étude. La main du copiste, différente de celle des traités précédents, doit remonter elle aussi au XIII^e siècle.

Fol. 67^v [92^v]: Notes diverses, dont l'une (s. XV *in*) a un rapport avec des problèmes de notre extrait (n^{os} 7–8; v. aussi note 51): “Si fuerint octo denarii ex una parte et octo ex alia et quis aliquem tetigerit, si vis scire quis tactus fuerit: Petas in quo rengo (*Gallice*: rang) sit. Hoc scito, facias novos rengos sumendo semper unum ex uno rengo et alium ex alio (...)”.

C'est un problème connu, que l'on retrouve par exemple dans le *De viribus quantitatis* de Luca Pacioli (n^o 69 du sommaire publié par A. Agostini, «Il *De viribus quantitatis* di Luca Pacioli», *Periodico di matematiche*, 4 (1924), pp. 165–192). Soient seize pièces de monnaie disposées en deux rangées:

$$\begin{array}{cccccccc} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & m_7 & m_8 \\ m_9 & m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16}. \end{array}$$

Nous désirons par des demandes répétées déterminer la place de l'une d'elles (admettons que ce soit m_4).

1^o) Demander dans quelle rangée se trouve la pièce considérée, puis faire deux nouvelles rangées en prenant successivement et dans l'ordre une pièce de l'une et de l'autre rangée alternativement, en commençant par la rangée où ne se trouve pas la pièce de monnaie cherchée:

$$\begin{array}{cccccccc} m_9 & m_1 & m_{10} & m_2 & m_{11} & m_3 & m_{12} & m_4 \\ m_{13} & m_5 & m_{14} & m_6 & m_{15} & m_7 & m_{16} & m_8. \end{array}$$

2^o) Demander où se trouve alors la pièce, et faire deux rangées comme précédemment, en commençant cette fois par la rangée où se trouve la pièce cherchée:

$$\begin{array}{cccccccc} m_9 & m_{13} & m_1 & m_5 & m_{10} & m_{14} & m_2 & m_6 \\ m_{11} & m_{15} & m_3 & m_7 & m_{12} & m_{16} & m_4 & m_8. \end{array}$$

3^o) Répéter cette même opération, mais en commençant par la rangée où ne se trouve pas la pièce:

$$\begin{array}{cccccccc} m_9 & m_{11} & m_{13} & m_{15} & m_1 & m_3 & m_5 & m_7 \\ m_{10} & m_{12} & m_{14} & m_{16} & m_2 & m_4 & m_6 & m_8. \end{array}$$

La pièce de monnaie cherchée sera toujours l'antépénultième dans la rangée qui la contient.

Fol. 68^r–74^v [93^r–99^v]: Arithmétique de Sacrobosco en paraphrase, avec une introduction contenant des tentatives d'explications étymologiques de l'origine du mot

algorismus à l'aide de Ἄργος, *agere* et *mos*, ἄνωγή, ἀριθμός / *rhythmus*, γύψος = gypsum, mais aussi, correctement, comme issu d'un nom propre;⁴ (inc.) “(C)irca hunc librum quatuor sunt inquirenda, scilicet libri materia, auctoris intentio, operis utilitas, titulus. Materia huius libri est numerus. Et notandum quod duplex est numerus: numerus numerans, numerus numeratus. Per hoc differt iste liber a compoto, quia in compoto traditur scientia de numero numerato, in hoc vero (libello) de numero numerante. Auctoris intentio est tradere artem de numero numerante, quo mediante scia(m)us artificiose numerare. Operis utilitas patet in auctoris intentione: utilitas est ut lecto hoc libello quemlibet numerum sciamus per IX figuras representare et etiam artificiose numerare. Titulus est: Incipit liber algorismi. Et notandum quod auctor iste Grecus extitit natione et multum peritus in arte arismetica, et figuras quemlibet numerum representantes ab Indis et Arabis habitas arti sue attribuit, quoniam algorismum, sic dictum, ex suo nomine appellavit; incipit enim sic dicens, etc. Notandum quod quidam dicunt «argorismus», quidam «algorismus», quidam «agorismus», et quod diversa vocabula diversas habent origines. «Argorismus» dicitur ab «Argis», id est «Grecis», et «mos, moris», quasi: Argorum mos. «Agorismus» dicitur ab «ago,-gis» et «ritmus», quod est numerus, quasi: agens de numeris. «Algorismus» dicitur a nomine inventoris, ut dictum est. Et dicitur ab «algos» Greco, quod est «alba arena» Latine, et «ritmus», quod est numerus, quasi: albe arene numerus; in alba enim arena numerare solebant. Et dicitur «algorismus» a «goge», quod est ductio, et «ritmus», quod est numerus, quasi ductio in numeros appellatur”, (expl.) “Item in hac radice extrahenda solent quidam distinguere numerum propositum per ternarios et semper incipere operari sub prima figura ultimi ternarii sive completi sive incompleti. Qui modus operandi equivalet ei qui docet incipere a loco millenarii”.⁵

Fol. 75^r–76^v [101^{v-r}, 100^{v-r}]: blancs, à l'exception d'un acte signé «Nivelle» au fol. 75^r.

Fol. 77^r [1^r]: Formule d'anathème: “Iste liber est Sancti Victoris Parisiensis. Quicumque eum furatus fuerit vel celaverit vel titulum istum deleverit anathema sit”; puis, indication du contenu (s. XV): “Que secuntur hic habent, scilicet: Radulphi Laudunensis de abaco, 2. De semytonio, 42. Glose super tabulam compoti, 50.

⁴On trouve dans de nombreux manuscrits contenant l'Arithmétique de J. de Sacrobosco et le *Carmen de algorismo* de A. de Villa Dei des explications fort semblables —répétées ultérieurement, comme dans l'Arithmétique de Jehan Adam de 1475, ms fr. Ste-Geneviève 3143, fol. 4^v—, et un texte presque identique apparaît dans le ms 512 (821) de la Bibliothèque municipale d'Arras, au fol. 89^r.

⁵Le texte de l'Arithmétique ne diffère de la version usuelle que par des changements de mots ou d'expression et par l'inversion entre la *mediatio* et la *duplatio*. Voir son édition (avec le Commentaire de Petrus de Dacia) par M. Curtze, *Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius, una cum algorismo ipso* (Copenhague 1897).

Quedam alia, 58. Pulvis mathematici, 62.⁶ Quedam de algorismo, 93. A «porrigit ipsa» et B «proposito contenti», C 99 et usque 101”.⁷

Fol. 77^v [1^v]: blanc (sauf l’indication de l’ancienne cote *fff 28*, que l’on trouve dans le Catalogue de 1514).

I.3 Les sources du recueil de problèmes

Dans ce qu’il en reste, notre recueil comprend 51 problèmes, suivis d’une note sur le traitement des problèmes commerciaux. Le tout a été repris directement d’autres ouvrages, *sans additions ni commentaires d’aucune sorte*. Les emprunts proviennent de divers chapitres des ouvrages concernés, mais, semble-t-il, *de manière fort arbitraire*; on a même l’impression que le choix des problèmes présentés n’a été guidé par aucune considération de leur contenu.

La première source de notre recueil est le *Liber augmenti et diminutionis* déjà mentionné, attribué à un certain Abraham ou Ibrahim, qui généralement résout divers problèmes linéaires par la méthode de deux fausses positions, puis à l’aide de l’algèbre —pour certains d’entre eux en outre par une méthode que l’auteur appelle *regula infusa*, et que Léonard de Pise nomme *regula versa*, laquelle règle consiste à traiter le problème en remontant de la situation finale à la situation initiale. Notre recueil a emprunté à cette source huit problèmes (dont deux sont de pures récréations mathématiques). Il apparaît que, à l’exception d’un seul, ils appartiennent à la deuxième moitié du *Liber augmenti et diminutionis*, et plutôt à sa fin qu’à son début (voir en fin d’article, Appendice A). On peut raisonnablement supposer que les feuillets aujourd’hui perdus en contenaient d’autres —même s’il est vraisemblable que la partie manquante ne devait pas être remplie avec des problèmes provenant de cette unique source.

La deuxième source de notre recueil est le *Liber mahameleth* (voir l’Appendice B). Comme dans le cas précédent, les emprunts deviennent à la fin de moins en moins espacés dans la source, à tel point que l’extrait reproduit intégralement les dernières pages du texte de Johannes Hispalensis. Pour les autres problèmes, où le *Liber mahameleth* présente en général successivement une résolution arithmétique (application numérique d’une formule), puis une illustration ou une justification géométrique de la formule utilisée, enfin une résolution algébrique, notre auteur n’a conservé que

⁶Déjà les textes antiques utilisaient *pulvis* dans le sens de «calcul» du fait de l’usage de l’abaque à poussière; voir les références dans E. Dijksterhuis, *Archimedes* (Princeton 1987), p. 31.

⁷A est suivi des premiers mots du second feuillet et B des derniers du pénultième (écrit) —pour permettre l’identification du manuscrit dans le cas de la disparition des feuillets extrêmes—, C du numéro du dernier feuillet écrit puis de celui du tout dernier feuillet. Voir le *Catalogue de la Bibliothèque de l’Abbaye de Saint-Victor de Paris de Claude de Grandrue, 1514* (edd. G. Ouy & V. Gerz-von Büren, Paris 1983), p. XIX ou XXVII —dans lequel Grandrue a simplement recopié cette table des matières.

la résolution arithmétique. Une illustration de sa négligence est qu'il a néanmoins consciencieusement reproduit des renvois ou des allusions aux parties qu'il n'a point recopiées —de même, du reste, que peu lui chaut de conserver les renvois incidents à d'autres problèmes qu'il n'a pas recopiés dans son extrait.

Dans ces deux sources se retrouvent tous les problèmes de notre recueil, à l'exception des n^{os} 27, 28 et 32, isolés dans une suite continue d'emprunts au *Liber mahameleth*, et dont ils ornaient probablement les marges d'une copie. A la suite de ces 51 problèmes apparaît un fragment de la traduction latine de l'Algèbre d'al-Khwārizmī, à savoir la petite partie consacrée à l'utilisation de l'algèbre dans la science du commerce.⁸ On reste donc bien dans le domaine de l'application de l'algèbre au négoce, qui est le sujet de la majeure partie des problèmes de notre extrait. On pourrait toutefois se demander pourquoi ce fragment devrait précisément servir de conclusion à notre texte. Il est vrai que, plus généralement, on pourrait se demander si l'auteur de notre recueil poursuivait réellement un but, tant le bénéfice qu'un lecteur aurait pu tirer de sa réunion hétéroclite de problèmes paraît douteux.

II Texte latin

Remarque préliminaire: Les parenthèses (rondes) enfermeront nos additions, alors que les parenthèses angulaires combleront des lacunes du texte. Les notes rapporteront les fautes du manuscrit ainsi que des remarques ou explications concernant le texte lui-même; quant aux remarques de nature mathématique, elles trouveront leur place dans la troisième partie de cette étude.

(53^r) *Capitulum obviationis.*⁹

(1) *⟨Q⟩* *uod si quis dixerit: Duo viri obviaverunt sibi, quorum quisque censum habebat. Et dixit unus eorum alteri: Da mihi ex hoc quod habes dragmam, et habebo quantum tibi remanebit. Respondit alter: Tu vero da mihi ex hoc quod habes 4 dragmas, et habebo duplum eius quod tibi remanebit. Quantum ergo fuit¹⁰ quod quisque eorum habebat?*

Capitulum numerationis eius secundum augmentum et diminutionem est ut assumas duas lances, unam ex 5 et alteram ex 7 —ac si dixisset: Unus habebat 5 et alter 7, et accepit habens 5 ab eo qui habebat 7 unum—, et factum est ut quisque¹¹

⁸Cette partie de l'Algèbre d'al-Khwārizmī suit l'exposition de l'algèbre proprement dite et précède ses applications à la géométrie et au calcul des successions. Son importance quantitative est négligeable en comparaison de celle des autres, tout particulièrement de la première et de la dernière.

⁹Tous les titres sont écrits dans la marge des feuillets et devaient ultérieurement être insérés dans le texte.

¹⁰*fuit* supra lin.

¹¹*unusquisque* pr. scr., *unus* del. (sc. exp.).

eorum habeat 6. Cum ergo habens 7 acceperit 4 ab eo qui habet 5, habebit 11^{cim} , et habenti 5 remanebit unum additum. Iam autem dixerat habens 7: Habebo duplum eius quod tibi remanebit. Sed conti(n)git ut habeat 11^{cim} ; et fuit conveniens ut haberet duo. Oppone igitur per (ea) 11^{cim} . Tunc iam errasti cum 9 additis; et hoc vocatur error primus. Deinde sumas duas lances a primis diversas. Quod est ut accipias uni ex 6, et secundo ex 8, semper addens unum super primam, que est 5. Cum ergo habens 8 dederit unum habenti 6, equabuntur omnia. Sed cum habens 8 acceperit 4 ab eo qui habet 6, habebit 12, et habenti 6 remanebunt duo. Iam autem dixerat: Habebo duplum eius quod tibi remanebit. Oportuit itaque ut haberet 4. Oppone ergo per ea 12. Tunc iam errasti cum 8 additis; et hoc vocatur error secundus. Multiplica ergo errorem secundum, qui est 8, in lancem primam, que est 5, et erunt 40. Et multiplica errorem primum, qui est 9, in lancem secundam, que est 6, et provenient 54. Deinde deme minorem duorum numerorum ex maiore eorum; quod est ut diminuas 40 ex 54,¹² et remanebunt 14. Postea minue minorem duorum errorum ex maiore eorum; quod est ut diminuas 8 ex 9, et remanebit unum. Per ipsum ergo divide 14, et provenie(n)t tibi 14. Hoc est igitur quod (53^v) unus habuit. Deinde redi ad investigandum quod secundus habuit. Quod est ut multiplices lancem primam, que est 7, in errorem lancis secunde, qui est 8, et provenient 56. Deinde multiplica lancem postremam,¹³ que est 8, in errorem lancis prime, qui est 9, et erunt 72. Postea minue minorem duorum numerorum ex maiore eorum; quod est ut diminuas 56 ex 72^{bus} , et remanebunt 16. Ea ergo divide per id (per) quod divisisti primum, scilicet per¹⁴ unum, et provenient tibi 16. Hoc igitur est quod secundus habuit. Intellige.

Hoc quoque per regulam invenitur. Que est ut assumas rem ignotam excepta dragma primo et assumas secundo rem et dragmam. Cum ergo primus, scilicet habens rem excepta dragma, acceperit a secundo, scilicet ab habente rem et dragmam, unam dragmam, erit ut primus habeat rem et secundus habeat rem; habebit ergo primus quantum et secundus. Sed cum secundus acceperit a primo 4 dragmas, remanebit primo res exceptis 5 dragmis, et habebit secundus rem et 5 dragmas. Et iam quidem¹⁵ dixerat secundus: Habebo duplum eius quod tibi remanebit. Dupla ergo quod habet primus ut equetur¹⁶ ei quod habet secundus; quod est ut duplex rem exceptis 5 dragmis, et erunt due res exceptis 10 dragmis, que equantur rei et 5 dragmis. Restaura ergo duas res per 10 dragmas, et adiunge eas rei et 5 dragmis; et habebis duas res, que equantur rei et 15 dragmis. Diminue ergo rem ex duabus rebus; et remanebit res, que equatur 15. Ergo res est 15. Minue igitur ex ea unum —quoniam dixit: excepta dragma—, et erit 14; et hoc est quod primus habuit. Et adiunge ei dragmam

¹² 5 et 4, cod.

¹³ secundam scr. ante postremam et del.

¹⁴ per supra lin.

¹⁵ quod, cod.

¹⁶ equatur, cod.

—quoniam dixit: rem et dragmam—, et erit 16; et ipsum est quod secundus habuit. *Intellige.*

De cambitione.

(2) (54^r) *Q*uod si aliquis dixerit: Vir quidam iuit ad cambitorem qui habebat dragmas duorum generum, ex uno quorum cambiebantur 20 pro aureo et ex altero 30, dedit autem aureum tali tenore ut reciperet dragmas ex duobus generibus cambitionis, et accepit 27 dragmas. Quantas ergo accepit ex eis, 20 quarum cambiebantur pro aureo, et quantas ex eis, quarum cambiebantur 30?

Capitulum numerationis eius secundum augmentum et diminutionem est ut sumas ex 20 quartam, que est 5, et ponas eam lancem; et sumas ex 30 lancem secundam, que sit 3 quarte ipsorum, et erit 22 et dimidium. Agrega¹⁷ ergo 5, que accepisti ex 20, 22^{bus} et dimidio, que accepisti ex 30; et erunt 27 et dimidium. Oppone ergo per ea 27, que dixit se accepisse ex duobus cambiis. Et tunc iam errasti cum dimidio addito; et hoc vocatur error primus. Deinde assume lancem secundam ex 20, que sit 10, et est medietas 20. Et assume ex 30 lancem secundam, que sit eius medietas, que est 15. Eis igitur adiunge 10, et erunt 25. Oppone ergo per ea 27. Et tunc iam errasti cum duobus diminutis; et hoc vocatur error secundus. Multiplica igitur errorem secundum, qui est duo, in lancem primam, que est 5, et provenient 10. Deinde multiplica errorem primum, qui est medietas, in lancem secundam, que est 10, et provenient 5. Postea coniunge simul duos numeros —eo quod unus eorum est diminutus et alter additus—, et erunt 15. Deinde agrega simul duos errores, qui sunt dimidium et duo, et erunt duo et dimidium. Divide ergo 15 per duo et dimidium, et provenient tibi 6 dragme. Hoc igitur est quod ipse accepit ex cambio 20^{ti}. Et hoc est 3 ipsius decime; oportet ergo ut ipse acceperit ex 30 7 decimas ipsius, que sunt 21.

Quod si scire volueris quantum acceperit ex eis quarum 30 cambiuntur, facies quemadmodum fecisti in questione prima,¹⁸ et inuenies.

Et hoc secundum regulam invenitur. Que¹⁹ est ut ex aureo assumas rem et multiplices eam in 20, et erunt 20 res. Remanet autem aureus excepta re. Ipsum igitur multiplica in²⁰ 30, et erunt 30 aurei exceptis (54^v) 30 rebus. Eis igitur adiunge 20 res, et erunt 30 aurei exceptis 10 rebus, qui equantur 27. Minue ergo 27 ex 30, et remanebunt tria, que equantur 10 rebus. Ergo res equatur tribus decimis. Oportet ergo ut ex 30 assumas 7^{tem} decimas.

¹⁷ *agregua* pr. scr. et corr.

¹⁸ sc.: in prima parte questionis.

¹⁹ *Quod*, cod.

²⁰ in supra lin.

De negotiatione.

(3) *⟨Q⟩*uod si dixerit: *Quidam cum censu negotiatus est, et duplatus est census, ex quo donavit dragmam unam. Deinde negotiatus est cum residuo, et duplatus est, et donavit ex eo duas dragmas. Postea negotiatus est cum residuo, et duplatus est, et donavit ex eo 3 dragmas. Et quod remansit fuit 10. Quantus ergo fuit primus census?*

Capitulum numerationis eius secundum augmentum et diminutionem est ut assumas lancem ex 4 et duples eam, et quod proveniet erit 8. Da igitur ex eo dragmam unam, et remanent 7. Ea ergo dupla, et erunt 14. Ex quibus dona duas dragmas, et remanebunt 12. Deinde dupla ea, et erunt 24. Ex quibus dona 3 dragmas, et remanebunt 21. Oppone ergo per ea 10 que ex censu remanserunt. Tunc iam errasti cum 11^{cim} additis. Deinde assume lancem secundam, que sit ex 5, et dupla eam, et²¹ erit 10. Et da ex²² eis dragmam unam, et remanebunt novem. Dupla ea, et erunt 18. Da ergo ex eis dragmas duas, et remanebunt 16. Deinde dupla ea, et erunt 32. Da itaque ex eis 3 dragmas, et remanebunt 29. Per ea igitur oppone 10, residuo videlicet census. Tunc iam errasti cum 19 additis. Multiplica igitur lancem primam, que est 4, in errorem lancis secunde, qui est 19, et erunt 76. Deinde multiplica lancis prime errorem, qui est 11^{cim}, in lancem secundam, que est 5, et quod proveniet erit 55. Minue ergo duorum numerorum minorem ex maiore eorum, quod est ut minuas²³ 55 ex 76, et remanebit 21. Deinde minue minorem duorum errorum ex maiore eorum, quod est ut minuas 11^{cim} ex 19, et remanebunt 8. Divide ergo 21 per 8, et provenient tibi due dragme et 5 octave dragme unius. (56^r) Hic ergo est census quem vis scire.

Est etiam regula eius. Que est ut ponas rem ignotam et duples eam, et erunt due res ⟨, ex quibus dona dragmam unam, et habebis duas res⟩ excepta dragma, deinde duples ea, et erunt 4 res exceptis duabus dragmis, post donec ex eis duas dragmas, et habebis 4 res exceptis 4 dragmis. Deinde dupla ea, et habebis 8 res exceptis 8 dragmis. Ex eis ergo dona 3 dragmas, et habebis 8 res exceptis 11^{cim} dragmis, que equantur 10. Adiunge ergo ea (sc. 11) supra 10, quod ex censu remansit, et habebis 8 res, que equantur 20 et uni (sic) dragmis. Divide ergo 20 et unam dragmas per 8,²⁴ et provenient tibi duo et 5 octave.

⟨Capitulum tritici et ordeī.⟩

(4) *⟨Q⟩*uod si dixerit: *Fuerunt 10 kaficii tritici et ordeī, et fuit kaficius tritici venditus pro 8 dragmis, et duo kaficii ordeī fuerunt venditi pro dragma una; et coniunctum fuit pretium, et fuit 50 dragme. Quantum ergo fuit triticum, et quantum ordeum?*

Erit capitulum numerationis eius secundum augmentum et diminutionem ut as-

²¹ et bis scr.

²² ex supra lin.

²³ diminuas pr. scr. et corr.

²⁴ per 8 res, cod.

sumas lancem ex uno —ac si triticum esset unum et venditum esset²⁵ 8 dragmis. Deinde deme hec 8 ex 50 dragmis, et remanebunt 42.²⁶ Cum eis igitur vende ordeum dando²⁷ duos kaficios pro dragma, et erunt 84 kaficii. Quibus adde kaficium cuius pretium fuit 8, et erunt 85 kaficii. Per eos igitur oppone 10 kaficios. Et tunc iam errasti cum 75 additis; et hoc vocatur error primus. Deinde assume lancem secundam ex duobus —quasi triticum esset duo et venditus esset quisque kaficius 8 dragmis—, et erunt 16 dragme. Minue igitur 16 ex 50, et remanebunt 34 dragme. Cum eis igitur vendatur ordeum, dando duos kaficios pro dragma, et erunt 68. Deinde adiunge eis duos kaficios, et erunt 70. Oppone (56^v) ergo per eos 10. Et tunc iam errasti cum 60 additis; et hoc vocatur error secundus. Multiplica igitur errorem secundum, qui est 60, in lancem primam, que est unum, et provenient 60. Deinde multiplica lancem secundam, que est duo, in primum errorem, qui est 75, et erunt 150. Postea deme minorem duorum numerorum ex maiore eorum; quod est ut diminuas 60 ex 150, et remanebunt 90. Deinde (deme) minorem duorum errorum ex maiore eorum; quod est ut minuas 60 ex 75, et remanebunt 15. Divide ergo 90 per 15, et provenient 6, kaficii. Hic ergo est numerus tritici, et quod ex 10 est residuum est ordeum, quod est 4 kaficii.

Et hoc secundum regulam invenitur. Que est ut assumas rem ex 10. Ipsam igitur vende pro 8 rebus. Deinde (sume) medietatem 10 excepta re —propter hoc quod dixit: vendatur ordeum duo pro dragma una— et invenies illud 5 medietate rei excepta. Adiungantur ergo 5 excepta rei medietate 8 rebus. Restaure²⁸ ergo medietatem rei ex 8 rebus, et remanebunt 7 res et dimidium (rei), et 5 ex numeris; que equantur 50. Minue ergo 5 ex 50, et remanebunt 45.²⁹ Habes igitur 7 res et dimidium rei, que equantur 45. Divide ergo 45 per 7³⁰ et dimidium, et provenient tibi 6. Hic igitur est numerus tritici; et ordeum est illud quod remanet ex 10, quod est 4. Intellige, et invenies.

De cambio.

(5) (Q)uod si dixerit: Fuerunt 100 aurei quorum quidam fuerunt melichini et quidam revelati; et quisque melichinus in cambio fuit venditus pro 5 solidis, et quisque revelatus fuit in cambio venditus pro 3^{bus} solidis, et quod ex cambio aggregatum est fuit 4^{ti} 60 solidi. Quot ergo eorum fuerunt melichini, et quot revelati?

Erit capitulum numerationis eius secundum augmentum et diminutionem ut dicas:

²⁵ est pr. scr. et corr.

²⁶ 4 2 (sc.: 4.2) in cod.

²⁷ ordeum post dando scr. et del.

²⁸ sic pro tolle (jabara pro hayyaza?).

²⁹ 4 5 (sc. cod.: 4.5) pr. scr. et corr. (sc. punctum del.).

³⁰ per 7 res, cod.

divisisti 100 in duas partes et multiplicasti unam in 5 et secundam in 3, et agregasti utramque multiplicationem, et quod provenit fuit 4^{ta} 60. Assume igitur lancem primam, que sit³¹ ex uno, et multiplica eam in 5, et erunt 5. Et remanebunt ex 100 99. Ea igitur in tria multiplica, et erunt 2^{ta} 97,³² quibus adiunge 5, et erunt 3^{ta} 02. Per ea igitur oppone 4^{tis} 60. Et tunc iam errasti cum 158 diminutis. Deinde accipe lancem secundam a prima diversam que sit³³ duo, et multiplica duo in 5, et erunt 10. Postea multiplica residuum ex 100, quod est 98, in tria, et erunt 2^{ta} 94, quibus adiunge 10, et erunt 3^{ta} 04. Per ea igitur oppone 4^{tis} 60. Et tunc iam errasti cum 156 (55^r) diminutis. Postea multiplica lancem primam, que est unum, in errorem secundum, qui est 156, et erunt 156.³⁴ Deinde multiplica lancem secundam, que est duo, in errorem primum, qui est 158, et erunt 3^{ta} 16. Postea minue minorem duorum numerorum ex maiore eorum, quod est ut minuas 156 ex 3^{tis} 16, et remanebunt 160. Deinde deme minorem duorum errorum ex maiore eorum; quod est ut diminuas 156 ex 158, et remanebunt 2^o. Divide ergo 160 per duo, et provenient tibi 80, aurei. Hic ergo est numerus aureorum melichinorum, et revelati sunt 20.

Et hoc quoque secundum regulam invenitur. Que est ut ex 100 assumas rem et multiplices eam in 5, et erunt 5 res. Remanebit 100 excepta re. Deinde multiplica 100 excepta re in tria, et erunt 300^{ta} exceptis tribus rebus. Deinde adiunge eis 5 res, et erunt 300^{ta} et 2^e res,³⁵ que equantur 4^{tis} 60. Minue ergo 300^{ta} ex 4^{tis} 60. Et remanebunt due res, que equantur 160. Ergo una res equatur 80. Et ipsi sunt melichini, et reliqui ex 100 sunt revelati.

(De foris rerum venalium.)

(6) *(Q)uod si dixerit: Duo viri intraverunt forum rerum venalium quorum unus habebat 10 kaficios et alter 20. Et vendiderunt cum una mensura et uno pretio.³⁶ Et recedentes habuit quisque eorum 30 dragmas.*

Erit capitulum numerationis eius secundum augmentum et diminutionem ut dicas: divisisti 10 in duas partes et multiplicasti unam partem in unum³⁷ et alteram in 4, et agregasti utramque multiplicationem, et quod provenit fuit 30 —partem tamen secundam non ob aliud multiplicas in 4 nisi ut quod provenit sit plus 30, non enim oportet ut sit minus. Assume igitur lancem ex uno, et multiplica eam in unum. Deinde

³¹ fit, cod.

³² 297 iter. (alia ut vid. m.) in mg.

³³ fit, cod.

³⁴ 165 scr. et corr.

³⁵ 3^{te} 02^e res (sc. 302 res), cod.

³⁶ Il faudrait ajouter: *Et intraverunt alterum forum et vendiderunt residuum ex kaficiis cum una mensura et uno pretio.*

³⁷ in unam, cod.

multiplica residuum, quod est 9, in 4, et erunt 36. Postea adiunge eis unum, et erunt 37. Per ea igitur oppone 30. Et tunc iam errasti cum 7 additis. Deinde accipe lancem secundam diversam a prima que sit ex duobus, et eam in unum multiplica, et proveniet duo. Deinde multiplica residuum ex 10,³⁸ quod est 8, (55^v) in 4, et erunt 32. Post adiunge eis duo, et erunt 34. Oppone ergo per ea 30. Et tunc iam errasti cum 4 additis. Multiplica igitur lancem primam, que est unum, in errorem lancis secunde, qui³⁹ est 4, et erunt 4. Postea multiplica lancem secundam (, que est duo,) in errorem lancis prime, qui⁴⁰ est 7, et erunt 14. Minue ergo ex eis 4, et remanebunt 10. Deinde minue minorem duorum errorum ex maiore eorum; quod est ut demas 4 ex 7, et remanebunt 3. Per ea igitur divide 10, et provenient tibi tria et tertia. Hoc igitur est quod habens 10 vendidit in primo foro, scilicet 3 kaficios et tertiam, dando unumquemque kaficium pro dragma, et sic habuit 3 dragmas et tertiam. Deinde minue tria et tertiam ex 10, et remanebunt 6 et due tertie. Vendat igitur unumquemque kaficium pro 4 dragmis, et habebit 26 et duas tertias; quibus adiunge tria et tertiam, et erunt 30.

De 20 quoque facias quemadmodum fecisti de 10, et invenies. Intellige.

Est preterea regula inveniendi hoc sicut regula 10 que dividuntur in duas partes.⁴¹

Capitulum de anulis.

(7) (Q)uod est ut dicas viro: Sume quod est inter te et anulum. Deinde dic ei: Dupla quod habes. Postea dic ei: Adiunge ei 5. (57^r) Deinde dic: Multiplica ipsum in 5. Post dic ei: Adde eis 10. Deinde dic: Multiplica quod habes in 10. Postea dic: Minue ex eo quod habes 400^{ta}. Cum ergo minuerit ea, accipe pro 400^{tis}⁴² unum, et ipsum serva. Deinde dic ei: Minue ex eo quod habes 100. Cum ergo diminuerit ea, assume tu etiam pro eis unum. Deinde precipe ei ut ex eo quod habet diminuat 100 quotiens poterit, et tu pro unoquoque centenario diminuto assume unum. Postquam ergo non remanserint ei 100, considera illud quod habes. Fiet enim ut illud ad quod pervenerit numerus sit ille qui assumpsit anulum.

³⁸ 100 scr. et corr.

³⁹ que, cod.

⁴⁰ que, cod.

⁴¹ Au bas de ce fol. (55^v) et du suivant (57^r), on lit la note de lecteur (s. XV) suivante: Unus querebat: Scuto valente 33 s(olidos), quantum valerent 7 solidi si scutum postea non valeat nisi 26 s(olidos). Respondeo sibi quot 7 solidi quorum 33 s(olidi) valent scutum sunt de moneta cuius 26 s(olidi) valent scutum, videlicet 5 s(olidi) 6 denarii et $\frac{2}{11}$ unius denarii, que due 11^{me} cum una 55^{ta} unius denarii faciunt 5^{tam} unius denarii, scilicet pictivinam (sic?) (57^r) 11 d(enarii) de moneta cuius 17 s(olidi) valent scutum, scuto valente 26 s(olidos) valent 16 d(enarios) ob(olum) pittam et $\frac{1}{17}$ unius d(enarii) cum $\frac{1}{4}$ unius 17^{me}, id est cum $\frac{1}{68}$ d(enarii).

⁴² 4^{tis} 00, cod. (sc.: 4^{tis}.00; v. adnn. 26, 29).

Alio quoque modo invenitur hoc. Qui est ut dicas viro: Sume quod est inter te et anulum in una manuum tuarum, et assume in altera tantumdem. Deinde assume tu in manu tua unum. Postea dic ei: Multiplica quod habes in una manuum tuarum in quemcumque numerum volueris. Postea multiplica unum, quem tenuisti in manu tua, in illum numerum in quem precepisti illum multiplicare. Et postea dic ei: Divide quod exivit de multiplicatione per illud quod habet in alia manu. Proveniet ergo⁴³ unicuique quantum fuit quod provenit ex multiplicatione eius quod habebas in manu tua. Postea dic ei: Eice quod attinet uni —id est: tot eice de summa quot sunt inter te et anulum— de eo quod accepisti —dubia est regula de anulo—,⁴⁴ et postea dic mihi quod remansit. Et tu, minue⁴⁵ illud de eo quod tenuisti in manu tua agregatum. Et quod remanebit erit illud.

Et hoc alio modo invenitur. Qui est ut dicas viro: Sume quod est inter te et anulum. Postea dic ei: Adiunge ei duplum ipsius. Deinde dic: Adde ei quantum est medietas eius quod agregatum est. Deinde dic ei: Minue ex eo quod habes 9. Cum ergo minuerit ea, (57^v) sume tu pro 9 duo. Deinde precipe ei ut ex eo quod habet minuat 9 (quotiens poterit),⁴⁶ et assume pro unoquoque novenario diminuto duo. Cum ergo remanserit ei minus 9, sume pro eo unum. Deinde considera illud quod habes. Ipsum namque est ille qui sumpsit anulum.

Et hoc item alio reperitur modo. Qui est ut dicas viro: Sume quod est inter te et anulum. Deinde dic: Multiplica quod habes in tria. Postea dic ei: Sume medietatem eius quod tibi provenit. Deinde quere ab eo si est in eo fractio. Quod si dixerit 'est', assume tu pro fractione unum, deinde dic ei: Serva fractionem donec sit unum integrum —id est: fac de fractione integrum.⁴⁷ Deinde dic ei: Multiplica quod habes in tria. Postea dic ei: Minue ex eo quod habes 9 (quotiens poteris),⁴⁸ et tu assume pro unoquoque novenario diminuto duo, et agrega que habes. Et tantum erit illud. Quod si dixerit 'non est in eo fractio', et cum dicis ei: Minue ex eo quod habes 9, et dixerit 'non est in eo 9', tunc tu dic ei quod nichil accepit (sc.: sumpsit). Expletus est liber.⁴⁹

(8) *Si 3 viri tenuerint 3 res diversi generis et volueris scire quam illarum quisque eorum teneat, noscas prius unamquamque earum et (in) corde tuo pone unam primam, et alteram secundam, et aliam tertiam. Et voca, similiter in corde tuo, primam*

⁴³ ergo supra lin.

⁴⁴ Tous les manuscrits sont ici corrompus et contiennent cette glose dans le texte ou en marge.

⁴⁵ innue, cod.

⁴⁶ sc. 9 (9) (Arab. *tis'atan tis'atan*).

⁴⁷ id est fac de fractione integrum supra lin. (alii codd.: mg. aut omm.).

⁴⁸ v. adn. 46.

⁴⁹ L'insertion de ces mots entre les deux derniers problèmes du *Liber augmenti et diminutionis* n'est pas propre à notre manuscrit.

duo, et secundam 9, et tertiam 10. Deinde unum trium hominum voca duo, et alium voca 3, et tertium voca 5. Et precipe uni eorum qui sciat quid quisque eorum teneat⁵⁰ ut multiplicet nomen tenentis rem primam in duo, et nomen tenentis rem secundam in 9, et nomen tenentis rem tertiam in 10, et agreget ea que ex multiplicationibus provenerint, et summam inde provenientem tibi dicat. Quam tu assumens minue ex 100, et residuum partire per 8. Et quod ex divisione provenerit erit nomen tenentis rem primam; et quod remanserit erit nomen tenentis rem secundam; et alius tenebit tertiam rem.⁵¹

Capitulum de conductione.

(9) Si quis querat: Conducuntur operarii ignoti quorum omnium pretium est 120 (et superant se equali differentia), primi vero pretium est 3, ultimi vero 21. Tunc quot sunt operarii?

Sic facies. Agrega pretia primi et ultimi, et per agregatum divide 120; et⁵² quod erit, (58^r) dupla. Et quod fit est numerus hominum. Cuius rei causa hec est. Scimus enim quod si agregaveris primum et ultimum, et agregatum multiplicaveris in dimidium hominum, exibat summa pretii omnium. Si igitur diviseris summam pretii omnium per agregatum ex pretio primi et ultimi, exibat medietas hominum. Si ergo duplaveris, erit numerus hominum.

Vel aliter. Pone operarios rem. Deinde agrega pretium primi et ultimi, et fient 24. Quos multiplica in dimidium operariorum, quod est dimidia res, et provenient 12

⁵⁰ te- scr. (in fine lin.) et del.

⁵¹ Au bas de ce fol. et des deux suivants, on lit d'une main de lecteur (s. XIV) le problème similaire suivant: Si 3 viri tenuerint 3 res diversi generis et volueris scire quam illarum unusquisque teneat, noscas prius unamquamque earum, et in corde tuo pone unam bonam, aliam meliorem, aliam optimam. Deinde habeas XXIII^{or} lapides vel denarios et uni eorum hominum tradas unum denarium vel lapidem, et alteri duos, et alteri tres, vel econtra, scilicet uni tres, alteri duos, etc., tamen in corde tuo bene retineas cui unum tradidisti et cui duo, etc. Postea de denariis residuis dic quod tradatur illi qui habet rem optimam tantum quantum sibi tradideras, ipsam non nominando optimam, sed per nomen proprium; et illi qui (58^r) habet rem meliorem bis tantum quantum sibi tradideras; et illi qui habet rem bonam seu minimam quater tantum quantum sibi tradideras. Nomina postea res per propria nomina, deinde inspice quot denarii remanent, et retineas istas 7 dictiones per ordinem, scilicet: aperi, prelati, inager, flamine, preias, riome, bifena. (58^v) Et cum remaneant duo denarii, capias in corde tuo secundam dictionem; si unus, capias primam; si quatuor, capias quartam; et sic de aliis. Et vide tres vocales illius dictionis, quia hec vocalis: a, significat rem optimam; et hec vocalis: e, significat rem mediam; et ista vocalis: i, significat rem minimam. Et applica primam vocalem dictionis illi cui tradidisti unum denarium, et secundam illi cui tradidisti duos, et sic de aliis. Si prima vocalis sit a, dic quod ille (59^r) cui tradidisti unum denarium habet rem optimam, si autem e, habet rem mediam, si i rem minimam. Et sic de 2^a et de 3^a.

⁵² et supra lin.

res, que adequantur ad 120. Res igitur equatur ad 10. Et tot sunt operarii.

Capitulum aliud de eodem.

(10) *Si quis⁵³ conducitur ad portandum 12 sextarios 30 miliaris pro 60⁵⁴ nummis, portat autem 3 sextarios nescio quot miliaris, quibus agregatis ad id quod debetur sibi de pretio proveniunt 15, tunc quot sunt miliaria, et quot nummi sive pretium?*

Sic facies. Multiplica 12 in 30, et provenient 3^{ta} 60. Deinde multiplica tres sextarios in 60 nummos, et fient 180. Quos agrega ad 3^{ta} 60,⁵⁵ et fient 540. Quos pone prelatum. Cum autem volueris scire miliaria, multiplica 360⁵⁶ in 15, et productum divide per prelatum; et quod exierit, scilicet 10, sunt miliaria. Cum autem volueris scire pretium, multiplica 180 in 15, et productum divide per prelatum, et quod exierit est pretium, scilicet quinque nummi.

Capitulum aliud de eodem.

(11) *Si quis conducit 3 operarios ad operandum 4 lapides in 30 diebus pro 60 nummis, duo autem operantur duos lapides in 10 diebus, tunc quantum debetur eis?*

Hec questio se habet ad sensus duos. Quorum unus est quod duo operarii tantum operantur in 4 lapidibus quantum 3 in eisdem, alius quod duo operantur duas tertias eius quod operantur 3.

Si autem volueris agere secundum primum sensum, sic facies. Quasi igitur dicatur: Aliquis conducit operarium ad portandum 4 sextarios 30 miliaris pro 60 nummis, portat autem 2 sextarios 10 miliaris, tu(n)c quantum competit ei? Facies per omnes modos huius questionis sicut supra docuimus, et exhibit (58^v) 10. Et hoc est quod voluisti.

Sed iuxta secundum modum sic facies. Multiplica numerum trium operariorum in numerum 4 lapidum, et productum multiplicabis in 30 dies; et provenient 360. Quos pone⁵⁷ prelatum. Deinde multiplica duos operarios in duos lapides quos operati sunt, et fient 4. Quos multiplica in 10 dies, et fient 40. Hos autem multiplica in 60, et provenient 2400. Quos divide per prelatum, et exhibit 6 et due tertie. Causa autem huius (hec) est. Scimus enim quod tres operarios operari 4 lapides 30 diebus idem est quod unum operari duodecim (lapides) 30 diebus. Nosti autem quod unum operarium operari 12 lapides 30 diebus idem est quod unum operarium operari unum lapidem in 3^{tis} 60 diebus. Manifestum est igitur quod unus operarius operatur unum lapidem in

⁵³ quis supra lin.

⁵⁴ 6 0 (sc.: 6.0) in cod.

⁵⁵ deinde multiplica tres sextarios hic add. et del.

⁵⁶ 36 0 (sc.: 36.0) in cod.

⁵⁷ ponc, supra corr.

360 diebus pro 60 nummis.⁵⁸ Nosti etiam quod duos operarios operari 2 lapides 10 diebus idem est quod unum operarium operari unum lapidem 40 diebus. Quasi ergo dicatur: Postquam 3^{ti} 60 sextarii dantur pro 60 nummis, tunc quantum est pretium 40 sextariorum? Multiplica igitur 40^{ta} in 60^{ta}, et productum divide per 3^{tos} 60; et id quod exit est id quod debetur duobus operariis pro duobus lapidibus.

De eodem.

(12) Cum aliquis conducit 5 operarios per⁵⁹ 30 dies pro 60 nummis, et duo ex illis operantur diebus aliquot de quibus subtracto eo quod illis competit de pretio remanent duo, tunc quot sunt dies et quantum est pretium eorum?

Omnibus illis modis facies hic quibus fecisti in capitulo de vehendo. Et quisquis illa int(e)lligit intelliget hoc.⁶⁰

De eodem.

(13) Si quis conducit pastorem ad custodiendum 100 oves 30 diebus pro 10 nummis, custodit autem 60 ex illis 20 diebus, tunc quantum debetur illi?

Sic facies. Multiplica 100 in 30, et fient 3000. Quos pone prelatum. Deinde multiplica 10 in 60, et productum inde multiplica in 20, et productum (59^r) divide per prelatum. Et exhibunt 4, et tantum est quod debetur ei.

De eodem.

(14) Si quis conducitur ad fodiendum⁶¹ foveam 10 cubitorum in longum et 8 in latum et 6 in altum pro 80 nummis, fodit autem foveam 4 cubitorum in longum et trium in latum⁶² et 5 in altum, tunc quantum debetur ei?

Sic facies. Multiplica 10 in 8, et fient 80. Quos multiplica in 6, et fient 480. Quos pone prelatum. Deinde multiplica 3 in 4, et productum in 5, et provenient 60. Quos multiplica in 80, et fient 4800. Quos divide per prelatum, et exhibunt 10. Et tantum debetur ei.

Capitulum aliud.

(15) Si quis querat: Cum aliquis carpentarius conducitur pro facienda⁶³ archa 10 cubitorum in longum et 5 in latum et 8 in altum pro 170 nummis, fecit autem archam

⁵⁸ nummis add. 1^a m. in mg.

⁵⁹ pro, cod.

⁶⁰ hec, cod.

⁶¹ faciendum, cod.

⁶² altum pr. scr. et corr.

⁶³ conducitur perfodienda, cod.

duorum cubitorum in longum et trium⁶⁴ in latum et 4 in altum, quantum debetur ei?

Multi putant hanc questionem similem esse questioni de fovea. Putant enim quod comparatio magnitudinis prioris arche ad magnitudinem secunde arche sit sicut comparatio pretii unius ad pretium alterius, quod quidem falsum est. Non enim venditur concavitas arche, sed parietes archam⁶⁵ concludentes.

Modus autem agendi in ea talis est. Scimus enim quod 6 parietes comprehendunt archam: superior, scilicet, cuius longitudo est 10 et latitudo 5, igitur magnitudo eius (est) 50, et alia⁶⁶ inferior illi opposita, que est equalis ei, magnitudo igitur utriusque earum simul est 100; et alius paries, 8 in longum et 5 in latum, magnitudo igitur illius est 40, que⁶⁷ est equalis suo opposito, magnitudo igitur utriusque simul est 80; et alius, 10 in longum et 8 in latum, qui est equalis suo opposito, cuius magnitudo est 80, igitur magnitudo utriusque simul est 160. Magnitudo igitur omnium parietum prioris arche est 3^{torum} 40. Similiter possumus scire magnitudinem parietum minoris arche. Scimus (59^v) enim eam similiter contineri sex parietibus: superiore, scilicet, qui est trium in longum et duorum in latum, magnitudo igitur eius est 6, et est equalis suo opposito, magnitudo igitur utriusque est 12; et alio, 4 in longum et duorum in latum, igitur magnitudo eius est 8, qui est equalis suo opposito, magnitudo igitur utriusque est 16; et alio, 4 in longum et trium in latum, magnitudo igitur eius est 12, qui est equalis suo opposito, magnitudo igitur utriusque est 24. Magnitudo igitur omnium parietum secunde arche est 52. Manifestum est igitur quod comparatio magnitudinis omnium parietum unius arche ad magnitudinem parietum alterius est sicut comparatio pretii unius ad pretium alterius. Comparatio igitur trecentorum quadraginta ad quinquaginta duo erit sicut comparatio de centum septuaginta ad pretium omnium parietum secunde arche. Igitur debentur ei 26 nummi. Et hoc est quod m(onstrare) v(oluimus).

Capitulum de alio.

(16) *Cum modius et quarta Segobiensis sit equalis kaficio et duabus tertiis de Toletto, tunc quot modii equantur 20^{ti} kaficiis?*

Hec questio est quasi dicatur: Postquam modius et quarta datur pro nummo et duabus tertiis, tunc quantum habeo⁶⁸ pro 20 nummis? Per omnes modos huius questionis facies sicut docui in capitulo de emendo et vendendo. Scilicet, multiplica mod(i)um et quartam in 20, et provenient 25. Quos divide per kaficium et duas tertias, et exhibunt 15. Et tot modi(i) adequantur 20 kaficiis.

⁶⁴ totidem, cod.

⁶⁵ arche, cod.

⁶⁶ sc.: paries.

⁶⁷ sc.: paries.

⁶⁸ habeo pr. scr. et supra corr.

Cuius probatio hec est. Scimus enim quod comparatio modii et quarte ad kaficium et duas tertias est sicut comparatio modiorum ignotorum ad 20^{ti} kaficios. Unde sunt 4 numeri proportionales. Quod igitur fit ex ductu modii et quarte in 20^{ti} si dividatur per kaficium et duas tertias exhibunt modii ignoti.

Vel aliter. Numeros denominationum, que⁶⁹ sunt tertia et quarta, multiplica inter se, et provenient 12. Quos multiplica in kaficium et duas tertias, (60^r) et provenie(n)t 20^{ti}. Quos pone prelatum. Deinde multiplica 12 in modium et quartam, et provenient 15. Quasi ergo queratur: Postquam 15 pro 20^{ti}, tunc quot habebopro 20 nummis(?) Fac ergo per omnes modos sicut supra docui, et provenient 15. Et hoc est quod voluisti.

Capitulum de alio.

(17) *Si quis querat: Cum 100 morabitanos, partim melichinos partim baetes, cambiat quis, sed melichinum pro 15 solidis, baetem⁷⁰ vero cambiat pro 10 solidis, et ex 100 predictis morabitanis proveniunt 1200^{ti} solidi,⁷¹ tunc quot fuerunt melichini et quot baetes?*

Si autem provenirent solidi plures quam 1500⁷² vel pauciores quam 1000, esset questio falsa. Non enim erit vera unquam nisi, cum numerum pretii minoris morabitanini, veluti 10, multiplicaveris in numerum morabitanorum, veluti hic 100, et pretium maioris morabitanini, veluti 15, multiplicaveris in numerum morabitanorum, et inter utrumque productum fuerit tota summa solidorum ex 100 morabitanis provenientium. Quod monstrabitur per probationem.

Sic autem facies. Minue 10 de 15, et remanent 5. Quos prelatum pone. Cum igitur volueris scire quot fuerint⁷³ baetes, multiplica pretium unius melichini, quod est 15, in numerum morabitanorum, qui est 100, et tunc proveniet numerus maior numero solidorum ex omnibus morabitanis provenientium; minue igitur numerum solidorum de producto illo, et quod remanserit divide per prelatum, et exhibunt 60, qui est numerus baetium. Cum vero volueris scire quot fuerint melichini, multiplica pretium unius baetium, quod est 10, in numerum morabitanorum, qui est 100, et tunc proveniet numerus minor numero omnium solidorum ex 100 morabitanis provenientium; quem minue ex eo, et quod remanserit divide per prelatum, et exhibunt 40, et tot fuerunt melichini.

⁶⁹ qui, cod.

⁷⁰ baetium, cod.

⁷¹ plures quam post solidi add. et del.

⁷² 1000 pr. scr. et supra corr.

⁷³ fuerint supra lin.

De alio.

(18) (60^v) *Cum 3 canales defluant in cisternam unam, quorum unus implet eam una die, secundus vero medietate diei, tertius tertia parte diei, si una hora incipiant 3 influere, tunc quanta parte diei implebunt eam?*

Sic facies. Tu scis quod unus canalus non implet unam cisternam nisi una die, et alius canalus, qui implet cisternam in medietate diei, implet duas una die, qui vero implet eam tertia parte diei, implet 3 una die. Sequitur ergo ut 3 canales simul influentes impleant 6 cisternas una die.⁷⁴ Sequitur ergo ut impleant unam cisternam sexta parte diei — una enim cisterna sexta pars est de sex. Omnes igitur canales implent cisternam unam sexta diei.

(19) *Si autem querat dicens quod unus canalus implet cisternam una die, et alius medietate diei, et tertius tertia parte diei, sed subtus est foramen per quod ipsa dum est plena evacuatur tertia parte diei, tunc foramine aperto et tribus canalibus simul influentibus quanta parte diei implebitur?*

Iam scis quod tres canales simul influentes implent 6 cisternas (una die), et quod foramen subtus apertum, postquam unam plenam evacuat tertia parte diei, una die evacuabit 3 plenas. Minue igitur 3 cisternas de 6, et remanebunt 3, de quibus denomina unam cisternam, scilicet tertiam. Nam 3 cisterne vacuate relin(u)ntur pro tribus plenis, et insuper remanent 3 plene; sequitur ergo ut unamquamque illarum trium impleant 3 simul (influentes) canales tertia diei. Et hoc est quod voluisti.

Item de alio.

(20) *Si quis querat: Cum, in una cisterna 10 cubitorum in longum et 8 in latum et 5 in altum continente mille mensuras aque, prohiciatur lapis trium in longum et duorum in latum et unius in altum, extracto lapide quantum descendit aqua?*

Sic facies. Scias per id quod supradixi(m)us quantum effunditur de aqua, scilicet 15 mesure. Quasi ergo dicatur: Cum, in⁷⁵ una cisterna 10 in longum et 8 in latum et 5 in profundum, prohiciatur lapis, et effunduntur⁷⁶ de aqua 15 mesure, post extractum lapidem quantum descendet aqua? Fac sicut supra docui, et exhibit quod voluisti.

(61^r) *Capitulum de alio.*

(21) *Si quis querat: Cupa cuius diametrum est 10 cubitorum et 8 in profundum, tunc quot mensuras vini continet(?)*

Sic facies. Multiplica diametrum cupe in se, et de productio minue septimam eius

⁷⁴ *Sequitur ... una die* (per homœoteleuton omitta) add. in mg.

⁷⁵ *in* supra lin. add.

⁷⁶ *effunditur* pr. scr. et supra corr.

et dimidiam septime; et quod remanet est magnitudo superficiei⁷⁷ interioris totius cupe. Quam multiplica in profunditatem eius, et productum duplica —dicitur enim, in vase unius cubiti in longum et latum et altum⁷⁸ duas mensuras contineri. Et quod provenit est id quod cupa capit.

Vel aliter. Ad inveniendum magnitudinem interioris superficiei⁷⁹ cupe, multiplica semper diametrum in tres⁸⁰ et septimam, et productus erit magnitudo circumferentie; ideo autem ex ductu diametri in 3 et septimam provenit magnitudo circumferentie, quoniam ab Antiquis iam probatum est circumferentiam omnem triplam esse diametri sui et insuper partem septimam⁸¹ diametri. Inventa autem circumferentia, dimidium eius multiplica in dimidium diametri, et productus est superficies unius fundi. Quam multiplica in profunditatem cupe, et productum duplica. Et proveniet quod queris.

Si vero⁸² quadrata fuerit, inveni magnitudinem eius sicut supra ostendimus, et duplata erit id quod voluisti.

Capitulum de scalis.

(22) Si scala 10 cubitorum in longum adiuncta parieti sibi equali retrahitur ab imo parietis 6 cubitis, tunc quantum descendit in summo?

Sic facies. Multiplica 6 in se, et multiplica 10 in se, et minus productum minue de maiore producto; et eius quod remanet radicem, que est 8, minue de 10, et remanebunt duo. Et tantum descendit scala a summo parietis.

(23) Si scala 10 cubitorum in longum adiuncta parieti eiusdem altitudinis retracta descendit a summo parietis duobus cubitis, tunc quantum retrahitur ab imo parietis?

Sic facies. Minue duos de 10, et remanebunt 8. Quos multiplica in se, et 10 in se, et minus productum minue de maiore, et remanebunt 36. Quorum radix, que est 6, est mensura spatii quo discedit⁸³ scala (61^v) ab imo parietis.⁸⁴

Aliud.

(24) Si scala nescio quam longa adiuncta parieti eiusdem altitudinis et retracta 6 cubitis a radice parietis descendit a summo parietis⁸⁵ duobus cubitis, tunc quante longitudinis est?

⁷⁷ superior, cod.

⁷⁸ alium (ut vid.) cod.

⁷⁹ superiori, cod.

⁸⁰ tres scr. sed e iterum (melius) supra scr.

⁸¹ septem, cod.

⁸² vero supra add.

⁸³ descendit, cod.

⁸⁴ Au haut du fol. apparaît l'inscription *Salutem in domino*.

⁸⁵ descendit post parietis scr. et del.

Sic facies. Multiplica 6 in se, et duo in se, et minus productum minue de maiore, et remanebunt 32. Quorum dimidium, quod est 16, divide per duos cubitos, et exhibunt 8. Quibus adde duos cubitos, et fient 10. Et tanta est altitudo scale sive parietis.

De alio.

(25) *Si quis querat: Cum arbor 30 cubitorum in altum a decem cubitis supra incurvatur ad terram,⁸⁶ tunc quantum distat cacumen eius fixum in plano a radice ipsius?*

Sic facies. Minue 10 de 30^{ta}, et remanebunt 20^{ti}. Quos multiplica in se, et 10⁸⁷ in se, et utrorumque productorum minue minus de maiore, et remanebunt 300. Quorum radix propinquior, que est 17 et undecim tricesime quarte, est id quod voluisti.

De eodem.

(26) *Si quis querat: Cum una arbor ignote longitudinis incurvatur a 6 cubitis supra, distat cacumen eius fixum in terra a radice ipsius 8 cubitis, quanta est⁸⁸ eius longitudo?*

Sic facies. Multiplica 8 in se, et fient 64. Deinde multiplica 6 in se, et fient 36. Agrega utrumque productum, et fient 100. Quorum radici agrega 6, et erit <id> quod voluisti, scilicet 16, et tanta est longitudo arboris.

Aliud.

(27) *In terra 20^{ti} cubitorum in longum et 10 in latum, quot arbores plantari possunt distantes a se duobus cubitis(?)*

*Divide longitudinem terre per duos cubitos, et ei quod exit semper adde unum; et provenient sicut hic 11^{cim}. Deinde divide⁸⁹ latitudinem terre per duos cubitos, et ei quod exit semper adde unum; **(62^r)** et fient sicut hic 6. Quos multiplica in 11^{cim}, et provenient 66. Et tot arbores⁹⁰ plantari possunt.*

Item.

(28) *In longitudine⁹¹ cuiusdam terre plantantur 11^{cim} arbores et in eius latitudine⁹² 6 arbores, omnes distantes a se duobus cubitis, tunc predicta terra quot cubitorum*

⁸⁶ *ad terram?*, cod.

⁸⁷ *0* pr. scr., *1* supra add.

⁸⁸ *est* supra add.

⁸⁹ *divide* bis scr., poster. del.

⁹⁰ *abores* prius scr., *r* add. supra.

⁹¹ *longitudinem* scr. et corr.

⁹² *longitudinem* scr. et del., *latitudine* add. supra.

est in longum et in latum⁹³ ?

Minue unum de 11^{cim} et quod remanet multiplica in duo, et fient 20^{ti}; et tot habet in longum. Similiter minue unum de 6, et remanebunt 5. Quos multiplica in duos cubitos, et provenient 10; et tot habet in latum.

De alio.

(29) Si ducrum turrium, quarum una sit 30 cubitorum in altum, altera vero 20^{ti},⁹⁴ bases distent⁹⁵ inter se 8 cubitis, tunc quantum distant cacumina earum?

Sic invenies. Differentiam que est inter 20^{ti} et⁹⁶ 30^{ta}, que est 10, multiplica in se, et 8⁹⁷ multiplica in se; et producta utriusque agrega, et fient 164. Quorum radix (propinquier), que est XII et quinque sexte, est numerus cubitorum quibus distant cacumina earum.

Item.

(30) Si duarum turrium, quarum una (est) 30 cubitorum in altum et altera 20, cacumina distent 12 cubitis et 5 sextis unius cubiti, tunc quantum distant bases earum?

Sic invenies. Differentiam que est inter 30 et 20, scilicet 10, multiplica in se, et productum minue de eo quod fit ex ductu 12 et quinque sextarum in se. Et eius quod remanserit radix est id quo distant bases earum. Cuius rei causa consimilis est illi quam assignavimus in precedenti.

De eodem.

(31) Si quis querat: Cum due turres, quarum (una) sit ignote longitudinis, altera vero 18 cubitorum in longum, cacumina earum distant 10 cubitis, bases vero 6 (62^v) distant cubitis, quanta est longitudo turris ignota?

Huius questionis sensus duplex est: aut⁹⁸ ut turris ignote longitudinis sit maior alia, aut minor. Ponamus autem quod sit maior. Sic igitur facies. Multiplica distantiam basium in se, et productum minue de eo quod fit ex ductu distantie cacuminum suorum in se; et eius quod remanet radicem agrega⁹⁹ longitudini turris cognite. Et quod provenerit est ignota longitudo turris.

⁹³ altum pr. scr. et corr.

⁹⁴ in 20^{ti} pr. scr., in del.

⁹⁵ bases autem earum distant, cod.

⁹⁶ et supra lin.

⁹⁷ 4 pr. scr. et supra corr.

⁹⁸ n- (vel ti-) pr. scr. et del.

⁹⁹ hacgrega, cod.

Si autem¹⁰⁰ diceretur in aliqua harum questionum distantia basium¹⁰¹ maior esse distantia cacuminum, falsum esset. Similiter etiam distantia cacuminum non potest dici equalis¹⁰² distantie basium cum una turrium fuerit altior alia; cum enim distantie fuerint equales, necessario turres¹⁰³ equales erunt. Quorum omnium probatio manifesta est.

Item de scientia inveniendi altitudinem turris vel arboris.

(32) *Cum volueris scire¹⁰⁴ altitudinem turris vel arboris, accipe duos fustes, unum maiorem alio uno cubito vel duobus. Deinde constitue quemque eorum super terram equalem perpendiculariter, et sint equidistantes inter se, et ad turrem vel arborem faciant lineam rectam. Deinde aspice eos ita ut radius (63^r) oculi incipiens a summitate minoris fustis et transiens per summitatem maioris perveniat usque ad summitatem turris. Quo facto minue longitudinem minoris fustis de longitudine maioris et residuum¹⁰⁵ denomina de spatio distantie que est inter duos fustes, et ipsam denominationem multiplica in spatium quod est inter minorem fustem et arborem vel turrem, et productum adde longitudini minoris fustis. Et quod provenerit longitudo turris vel arboris erit.*

Item de alio.

(33) *Si corda 4 cubitorum circumdat fasciculum 100 virgarum, tunc quot virge consimiles circumdantur a corda 10 cubitorum?*

Sic invenies. Multiplica 4 in se, et provenient 16. Quos pone prelatum. Deinde multiplica 10 in se, et provenient 100. Quos multiplica in numerum virgarum, qui est 100, et provenient 1000(0). Quos divide per prelatum, et exibunt 625. Et tot sunt virge quesite.

Vel aliter. Multiplica 10 in se, et provenient 100. Quos divide per 16, et provenient 6 et quarta. Quos multiplica in numerum virgarum, qui est 100, et provenient 625. Et hoc est quod voluisti.

Causa huius hec est. Talis est enim comparatio virgarum ad virgas qualis est comparatio quadrati unius corde ad quadratum alterius corde.

¹⁰⁰ *Si tunc autem* pr. scr., *tunc* del.

¹⁰¹ *baseum* pr. scr. et supra corr.

¹⁰² *hequalis*, cod.

¹⁰³ *tres* pr. scr. et corr.

¹⁰⁴ *Similiter diceretur* pr. scr. et del.

¹⁰⁵ *re in residuum* add. supra.

Item de eodem.

(34) Si corda 4 cubitorum circumdat fasciculum unum, et alia corda 12 cubitorum circumdat alium fasciculum, tunc quotiens minor fasciculus continetur in maiore?

Sic invenies. Multiplica 4 in se, et provenient 16. Deinde multiplica 12 in se, et fient 144. Quos divide per (16),¹⁰⁶ et exhibunt 9. Et totiens minor continetur (63^v) in maiore, scilicet novies.

Item aliud.

(35) Similiter etiam si diceretur quod, cum corda 4 palmorum¹⁰⁷ circumdat fasciculum messis cuius pretium est dimidium nummus, tunc fasciculus circumdatus corda 12 palmorum quanti pretii erit?

Sic invenies. Multiplica 4 in se, et productum pone prelatum. Deinde multiplica 12 in se, et provenient 144. Quos divide per prelatum, et exhibunt 9. Quos multiplica in dimidium, et provenient quatuor et dimidium. Et tantum est pretium eius. Ideo autem multiplicamus 9 in dimidium quoniam non volumus scire nisi fasciculus¹⁰⁸ corde 4 palmorum quotiens continetur in fasciculo corde 12 palmorum, et invenimus novies, et dedimus¹⁰⁹ unicuique fasciculo dimidium nummum; unde competunt eis 4 nummi et dimidius. Cuius rei causa est id quod Euclides dixit in 12^o libro.

Item.

(36) Si quis querat: Cum corda 10 cubitorum (in longum) circumdet mille virgas, tunc quante longitudinis est corda circumdans ducentas L^a?

Scimus autem quod comparatio de mille ad ducentos quinquaginta est sicut comparatio quadrati de 10 ad quadratum quesiti. Fac ergo sicut supradictum est, et exhibit quadratus quesiti viginti quinque. Igitur quesitum est quinque.

Item aliud de eodem.

(37) Si quis querat: Cum corda trium cubitorum circumdet fasciculum pretii 10 et octo (sc.: 18) nummorum, tunc quante longitudinis est corda circumdans fasciculum pretii duorum nummorum?

Scimus quod comparatio quadrati trium, qui est 9, ad quadratum quesiti est sicut comparatio de 18 ad duo. Fac ergo sicut supra docui, et exhibit id quod queritur unum.

Secundum hoc autem considera omnia (64^r) his similia, et invenies ita esse.

¹⁰⁶ Deinde ... divide per (per homœoteleuton omissa) in ima pag. add.

¹⁰⁷ cubitorum pr. scr. et del.

¹⁰⁸ fasciculos, cod.

¹⁰⁹ dict- pr. scr. et del.

Capitulum de nuntiis.

(38) *Cum unus nuntius mittatur ad unam civitatem sic ut in unaquaque die eat 20^{ti} miliaria, deinde post 5 dies missus est alter ut eat in unaquaque die 30^a miliaria, in quot diebus consequetur¹¹⁰ eum?*

Sic facies. Differentiam que est inter 20^{ti} et 30^a, scilicet 10, pone prelatum. Deinde multiplica 5 in 20^{ti}, et productum divide per prelatum, et exhibunt 10, et tot dies incedit secundus nuntius. Primus autem ivit totidem et insuper 5 dies, qui sunt 15. Et consequutus est eum (secundus nuntius).

Capitulum de eodem aliud.

(39) *Cum unus nuntius mittitur de una civitate ad aliam distantem 400^{tis} miliaris ita ut in unaquaque die eat 20 miliaria, post 15 autem dies mittitur alius post eum ut consequatur eum in introitu civitatis ita ut simul ingrediantur, tunc quot miliaria debet ire unaquaque die?*

Sic facies. Multiplica 15 in 20^{ti}, et provenient 300^{ti}. Quos minue de 400^{tis}, et remanebunt 100. Quos divide per 20^{ti}, et exhibunt 5. Per quos divide 400^{tos}, et exhibunt 80^{ta}, et tot miliaria debet ire quaque die ut consequatur primum secundus in 5 diebus.

Capitulum de alio.

(40) *Cum una navis moveatur ab uno loco ad alium distantem 300^{tis} miliaris, currit autem quaque die 20^{ti} miliaria, et quaque die a vento repercussa¹¹¹ redit 5 miliaria, tunc quot diebus perveniet ad locum distantem 300^{tis} miliaris?*

Sic facies. Agrega 5 ad 20, et fient 25. Deinde minue 5 de 300^{tis}, et remanebunt 295.¹¹² Quos divide per differentiam que est inter 5, quibus redit, et 20^{ti}, que currit, scilicet 15, et exhibunt 19 et remanebunt 10. Quos adde ad 5 miliaria, et fient 15. Quos denomina de 25, scilicet 3 quintas diei. Quas 3 quintas diei agrega ad 19, (64^v) et fient 19 et 3 quinte diei, et tot diebus pervenit ad locum propositum.

De eodem.

(41) *Cum unus serpens egrediatur de cavea tertia parte sue¹¹³ longitudinis in die et quaque die redeat quarta parte sue longitudinis, tunc quot diebus egredi(e)tur totus?*

Sic facies. Numeros denominantes tertiam et quartam inter se multiplica, et provenient 12. Quorum tertiam et quartam, que sunt 3 et 4, agrega, et fient 7, quos

¹¹⁰ consequitur, cod.

¹¹¹ repercussa, cod.

¹¹² 2^{ta} 0 et 95 cod., ta del.

¹¹³ sue add. supra lin.

retine. Deinde minue de 12 tres, et remanebunt 9. Quos divide per differentiam que est inter 3 et 4, que est unum, et exhibunt 9. Deinde denomina 3 de 7, scilicet 3 septimas. Quas aggrega ad 9, et provenient 9 et 3 septime, et tot diebus et partibus diei egreditur totus.

Aliud.

(42) *Cum serpens 7 cubitorum in longum quaque die egreditur de cavea uno cubito et quaque die redit tertia parte cubiti, quot diebus egredi(e)tur totus?*

Sic facies. Agrega tertiam ad unum, et fiet unum et tertia. Que retine. Deinde minue tertiam de 7 cubitis, et remanebunt 6 et due tertie. Quos divide per differentiam que est inter tertiam et cubitum, et exhibunt 10. Deinde denomina tertiam de uno et tertia, scilicet quartam. Quam aggrega ad 10, et fient 10 et quarta, et tot diebus et tanta parte diei egreditur totus.

(43) *Cum unus serpens egrediatur quaque die quantum est tertia parte sui, et redit nescio quantum, et egreditur totus 9 diebus et tribus septimis diei, tunc quanta est pars ignota (sue longitudinis) qua¹¹⁴ redit?*

Sic facies. De tertia parte de 9 et trium septimarum diei semper minue unum, et remanebunt duo et septima. Deinde minue 3 septimas de 9, et remanebunt 8 et 4 septime. De quibus denomina duos et septimam, scilicet quartam, et tanta est pars ignota, scilicet quarta.¹¹⁵

(44) *Cum serpens 7 cubitorum in longum quaque die (65^r) egreditur uno cubito et quaque die redit quadam parte cubiti ignota, egreditur autem totus 10 diebus et quarta, tunc quanta est pars illa?*

Sic facies. Multiplica cubitum in 10 et quartam, et erunt 10 cubiti et quarta. De quibus minue longitudinem serpentis, que est 7, et remanebunt 3 et quarta. Deinde quartam additam 10 diebus minue de 10, et remanebunt 9 et 3 quarte. De quibus denomina 3 et quartam, scilicet tertiam. Igitur tertia parte cubiti redit quaque die.

Capitulum de alio.

(45) *Erant 3 homines. Quorum primus dixit duobus: Accipite tantum de meo quantum habet unusquisque vestrum. Secundus similiter dixit primo et tertio: Unusquisque vestrum accipiat¹¹⁶ tantum de meo quantum habet quisque¹¹⁷ vestrum. Tertius similiter dixit primo et secundo. Quo facto inventi sunt habere equaliter. Tunc quantum habet unusquisque eorum?*

¹¹⁴que, cod.

¹¹⁵On lit au bas du fol. *In noi* (sc.: *In no(m)i(ne)*).

¹¹⁶accipite, cod.

¹¹⁷unusquisque pr. scr. et corr.

Sic facies. Semper adde unum numero hominum, et fient sicut hic 4, et tantum habebat tertius. Quos dupplica, et de duplicato minue unum, et remanebunt 7, et tantum habebat secundus. Quos dupplica, et de duplato minue unum, et remanebunt 13, et tantum habebat primus. Ita fiet quotquot sint homines.

Item.

(46) *Quatuor homines erant. Quorum primus dixit reliquis tribus: Unusquisque vestrum accipiat tantum de meo quantum habet de proprio; et factum est ita. Secundus similiter dixit aliis tribus: Accipiat (tantum) de meo unusquisque vestrum quantum habet de proprio; et factum est ita. Similiter tertius dixit reliquis tribus, et quartus similiter dixit. Quo facto inventi sunt habere equaliter. Quantum habebat unusquisque eorum?*

Semper adde unum numero hominum, et fient sicut hic 5, et tantum habebat quartus. Quos dupplica, et de duplato minue unum, et fient 9, et tantum habebat tertius. Quos iterum dupplica, et de duplato minue unum, et fient 17, et tantum habebat secundus. Quos dupplica, et de duplato minue unum, et fient 33, et tantum habebat primus.

(47) *Tres homines habebant inter se 72 nummos. Quorum primus dixit reliquis duobus: Accipiat unusquisque vestrum¹¹⁸ tantum de meo quantum habet de proprio. Similiter secundus reliquis duobus, similiter tertius reliquis duobus dixit. Et factum est ita, et inventi sunt habere equaliter tantum de predictis 72^{bus}. Quot habebat unusquisque eorum(?)*

Inveni per predictam regulam quantum habebat quisque eorum. Et invenies quod tertius habebat 4, secundus 7, primus 13. Quos omnes aggrega, et fient 24. Per quos divide 72^{os}, et exibunt 3. Quos multiplica in id quod habet unusquisque eorum, et invenies quod queris. Primus igitur habebat 39, secundus vero 21, tertius 12.¹¹⁹

Item.

(48) (65^v) *Tres homines erant. Quorum primus dixit reliquis duobus: Accipite, unusquisque vestrum, tantum de meo quantum habetis de proprio. Similiter secundus dixit. Tertius similiter dixit. Quo facto inventus est habere primus quantum secundus¹²⁰ et insuper duos nummos. Et secundus inventus est habere quantum tertius et insuper nummum unum. Tunc quantum habebat unusquisque eorum?*

Post omnem acceptionem id quod habebat quilibet eorum pone quemlibet numerum, verbi gratia tertius ponatur habere 5. Secundus igitur habebat 6, et¹²¹ primus 8.

¹¹⁸ *vestrum*, litteram *v* supra (melius) scr.

¹¹⁹ 13 (ut vid.) pr. scr. et corr.

¹²⁰ *quantum et secundus* cod., *quantum secundus* J. Hispalensis.

¹²¹ *et* add. supra.

retine. Deinde minue de 12 tres, et remanebunt 9. Quos divide per differentiam que est inter 3 et 4, que est unum, et exhibunt 9. Deinde denomina 3 de 7, scilicet 3 septimas. Quas agrega ad 9, et provenient 9 et 3 septime, et tot diebus et partibus diei egreditur totus.

Aliud.

(42) *Cum serpens 7 cubitorum in longum quaque die egreditur de cavea uno cubito et quaque die redit tertia parte cubiti, quot diebus egredi(e)tur totus?*

Sic facies. Agrega tertiam ad unum, et fiet unum et tertia. Que retine. Deinde minue tertiam de 7 cubitis, et remanebunt 6 et due tertie. Quos divide per differentiam que est inter tertiam et cubitum, et exhibunt 10. Deinde denomina tertiam de uno et tertia, scilicet quartam. Quam agrega ad 10, et fient 10 et quarta, et tot diebus et tanta parte diei egreditur totus.

(43) *Cum unus serpens egrediatur quaque die quantum est tertia parte sui, et redit nescio quantum, et egreditur totus 9 diebus et tribus septimis diei, tunc quanta est pars ignota (sue longitudinis) qua¹¹⁴ redit?*

Sic facies. De tertia parte de 9 et trium septimarum diei semper minue unum, et remanebunt duo et septima. Deinde minue 3 septimas de 9, et remanebunt 8 et 4 septime. De quibus denomina duos et septimam, scilicet quartam, et tanta est pars ignota, scilicet quarta.¹¹⁵

(44) *Cum serpens 7 cubitorum in longum quaque die (65^r) egreditur uno cubito et quaque die redit quadam parte cubiti ignota, egreditur autem totus 10 diebus et quarta, tunc quanta est pars illa?*

Sic facies. Multiplica cubitum in 10 et quartam, et erunt 10 cubiti et quarta. De quibus minue longitudinem serpentis, que est 7, et remanebunt 3 et quarta. Deinde quartam additam 10 diebus minue de 10, et remanebunt 9 et 3 quarte. De quibus denomina 3 et quartam, scilicet tertiam. Igitur tertia parte cubiti redit quaque die.

Capitulum de alio.

(45) *Erant 3 homines. Quorum primus dixit duobus: Accipite tantum de meo quantum habet unusquisque vestrum. Secundus similiter dixit primo et tertio: Unusquisque vestrum accipiat¹¹⁶ tantum de meo quantum habet quisque¹¹⁷ vestrum. Tertius similiter dixit primo et secundo. Quo facto inventi sunt habere equaliter. Tunc quantum habet unusquisque eorum?*

¹¹⁴ *que*, cod.

¹¹⁵ On lit au bas du fol. *In noi* (sc.: *In no(m)i(ne)*).

¹¹⁶ *accipite*, cod.

¹¹⁷ *unusquisque* pr. scr. et corr.

Sic facies. Semper adde unum numero hominum, et fient sicut hic 4, et tantum habebat tertius. Quos dupplica, et de duplicato minue unum, et remanebunt 7, et tantum habebat secundus. Quos dupplica, et de duplato minue unum, et remanebunt 13, et tantum habebat primus. Ita fiet quotquot sint homines.

Item.

(46) *Quatuor homines erant. Quorum primus dixit reliquis tribus: Unusquisque vestrum accipiat tantum de meo quantum habet de proprio; et factum est ita. Secundus similiter dixit aliis tribus: Accipiat <tantum> de meo unusquisque vestrum quantum habet de proprio; et factum est ita. Similiter tertius dixit reliquis tribus, et quartus similiter dixit. Quo facto inventi sunt habere equaliter. Quantum habebat unusquisque eorum?*

Semper adde unum numero hominum, et fient sicut hic 5, et tantum habebat quartus. Quos dupplica, et de dupplato minue unum, et fient 9, et tantum habebat tertius. Quos iterum dupplica, et de dupplato minue unum, et fient 17, et tantum habebat secundus. Quos dupplica, et de dupplato minue unum, et fient 33, et tantum habebat primus.

(47) *Tres homines habebant inter se 72 nummos. Quorum primus dixit reliquis duobus: Accipiat unusquisque vestrum¹¹⁸ tantum de meo quantum habet de proprio. Similiter secundus reliquis duobus, similiter tertius reliquis duobus dixit. Et factum est ita, et inventi sunt habere equaliter tantum de predictis 72^{bus}. Quot habebat unusquisque eorum(?)*

Inveni per predictam regulam quantum habebat quisque eorum. Et invenies quod tertius habebat 4, secundus 7, primus 13. Quos omnes aggrega, et fient 24. Per quos divide 72^{os}, et exibunt 3. Quos multiplica in id quod habet unusquisque eorum, et invenies quod queris. Primus igitur habebat 39, secundus vero 21, tertius 12.¹¹⁹

Item.

(48) (65^v) *Tres homines erant. Quorum primus dixit reliquis duobus: Accipite, unusquisque vestrum, tantum de meo quantum habetis de proprio. Similiter secundus dixit. Tertius similiter dixit. Quo facto inventus est habere primus quantum secundus¹²⁰ et insuper duos nummos. Et secundus inventus est habere quantum tertius et insuper nummum unum. Tunc quantum habebat unusquisque eorum?*

Post omnem acceptionem id quod habebat quilibet eorum pone quemlibet numerum, verbi gratia tertius ponatur habere 5. Secundus igitur habebat 6, et¹²¹ primus 8.

¹¹⁸ *vestrum*, litteram *v* supra (melius) scr.

¹¹⁹ 13 (ut vid.) pr. scr. et corr.

¹²⁰ *quantum et secundus* cod., *quantum secundus* J. Hispalensis.

¹²¹ *et* add. supra.

Inveniam autem quantum habet quisque eorum secundum almencum, id est converso, quod est incipere converso a superius.¹²² Adde ei quod habet tertius dimidium eius quod habet secundus et dimidium eius quod habet primus, et fient 12; et quod secundus habet fiet 3, et primus 4. Deinde ei quod habet secundus adde dimidium de 12 et dimidium de 4; quod igitur habet secundus fiet 11^{cim}, et quod habet tertius fiet 6, et quod (habet) primus fiet 2. Deinde ei quod habet primus adde dimidium de 6 et dimidium de 11^{cim}. Primus igitur habebat 10 et dimidium, et secundus 5 et dimidium, tertius vero 3, et tantum habebat quisque eorum ante participationem.

In hoc autem capitulo infinite possunt¹²³ fieri questiones.

Item aliud.

(49) *Tres homines volebant emere quendam equum, sed quisque sibi. Quorum primus dixit secundo: Si dederis mihi dimidium eorum que habes, agregatum cum eo quod habeo proveniet pretium equi. Secundus vero dixit tertio: Si dederis mihi tertiam partem eorum que habes, agregatum cum eo quod habeo habebō pretium huius equi. Tertius dixit primo: Si dederis mihi quartam partem eorum que habes, agregatum cum eo quod habeo habebō pretium huius equi. Tunc quantum habebat quisque eorum, et quantum erat pretium equi?*

Hec questio interminata est. In qua sic facies. Ex numeris dominantibus dimidium, tertiam et quartam multiplicatis inter se provenient 24. Quibus semper adde unum si impar fuerit numerus hominum, si vero par semper minue unum de numero denominationum; et quod provenerit post additionem vel diminutionem unius, hoc erit pretium equi, sicut hic 25.¹²⁴ Cum autem volueris scire quantum habet primus, de numero dominante dimidium, qui est duo, minue unum, et remanebit unum. Quem multiplica in numerum dominantem tertiam, qui est 3, et provenient 3. Quibus adde unum, et fient 4. Quos multiplica in numerum dominantem quartam, qui est 4, et fient 16, et tantum habet primus. Quos minue de pretio equi, et quod remanet multiplica in numerum dominantem dimidium, qui est duo, et fient 18, et tantum habet secundus. Quos iterum minue de pretio equi, et quod remanet multiplica in numerum dominantem tertiam, qui est 3, et provenient 21^{us}, et tantum habet tertius.

(50) *Quatuor homines convenerunt ad emendum quendam equum, sed quisque sibi. Quorum (66^r) primus dixit secundo: Si dederis mihi dimidium eius quod habes, agregatum cum eo quod habeo¹²⁵ habebō pretium huius equi. Secundus vero dixit*

¹²² secundum almencum quod est incipere id est converso a superius, cod.

¹²³ possunt, cod.

¹²⁴ 24 pr. scr. et corr.

¹²⁵ habebō pr. scr., b del.

*tertio: Si dederis mihi tertiam eius quod habes et agregavero cum eo quod habeo*¹²⁶ *habeo pretium huius equi. Tertius vero dixit quarto: Si dederis mihi quartam eius quod habes et agregavero cum eo quod habeo, habeo pretium huius equi. Quartus vero dixit primo: Si dederis mihi quintam eius quod habes, et agregavero cum eo quod habeo, habeo pretium huius equi. Tunc quantum habebat quisque eorum et quantum erat pretium huius equi?*

Hec questio interminata est. In qua sic facies. Multiplica ⟨numeros⟩ denomina⟨n⟩-tes omnes fractiones propositas, nulla pretermissa, et provenient 120. De quibus minue unum —par est enim numerus hominum—, et remanebunt 119. Et tantum est pretium equi. Cum autem volueris scire quantum habet primus, de numero denominante dimidium minue unum, et remanebit unum. Quē multiplica in numerum denominantem tertiam, et producto adde unum, et fient 4. Quos multiplica in denominationem quarte, et de producto minue unum, et remanebunt 15. Quos multiplica in denominationem quinte, et provenient 75; et tantum habet primus. Quos minue de pretio equi, et quod remanet multiplica in denominationem dimidii, et fient 88; et tantum habet secundus. Quos minue de pretio equi, et quod remanet multiplica in denominationem tertie, et fient 93; et tantum habet tertius. Quos minue de pretio equi, et quod remanet multiplica in denominationem quarte, et provenient 104; et tantum habet quartus. Et hoc est quod scire voluisti.

(51) *Quatuor homines*¹²⁷ *convenerunt*¹²⁸ *super emendo quodam equo, sed quisque sibi. Quorum primus dixit reliquis tribus: Si dederitis mihi dimidium eius quod habetis, et aggregavero cum eo quod habeo, habeo pretium huius equi. Secundus vero dixit reliquis tribus: Si dederitis mihi tertiam eius quod habetis, et agregavero*¹²⁹ *cum eo quod habeo, habeo pretium huius equi. Tertius vero similiter petit sibi dari quartam, et quartus quintam. Tunc quantum habet quisque eorum, et quantum est pretium equi(?)*.

Hec questio est interminata. Assignabo autem in illa modum agendi secundum gebra (sc.: secundum algebram), non tamen secundum Avoquemel. Sit id quod habet primus unum, quod vero habent 3 sit res. Deinde medietati rei adde unum, et fiet unum et dimidia res; et tantum est pretium equi. Quod multiplica in denominationem tertie, et provenient 3 ⟨et⟩ res et dimidia res. De quibus minue unum et rem, qui est census omnium,¹³⁰ et remanebunt duo et dimidia res. Quorum medietas¹³¹ est unum et quarta rei; et tantum habet secundus. Deinde multiplica pretium equi in

¹²⁶ habeo pr. scr. et corr.

¹²⁷ hominis, cod.

¹²⁸ conveniunt, cod.

¹²⁹ agregaavero, cod.

¹³⁰ hoi (= hominum) scribere inc. et del.

¹³¹ Post medietas add. que.

denominationem quarte, et provenient 4 et due res. De quibus minue unum et rem, qui est census omnium, et remanebunt 3 et una res. Quorum tertia est tertia rei et unum; et tantum habet (66^v) tertius. Deinde multiplica pretium equi in denominationem quinte, et provenient 5 et due res et dimidia. De quibus minue unum et rem, et remanebunt 4 et res et dimidia. Quorum quarta est¹³² unum et 3 octave rei; et tantum habet quartus. Deinde aggrega id quod habet secundus et tertius et quartus, et fient 3 et 5 sexte rei et tres quarte sexte rei, que adequantur ei¹³³ quod habet secundus et tertius et quartus ex alia parte, quod est res. Deinde fac sicut predictum est in mucabala, scilicet ut reicias quod com(m)une est, id est quod in utroque latere repetitur; et remanebit quarta sexte rei, que adequatur tribus. Res igitur equatur 72^{bus}. Pretium autem equi erat unum et dimidia res; igitur pretium equi erit 37. Secundus autem habebat unum et quartam rei; igitur habebit 19. Tertius quoque habebat unum, et tertiam rei, igitur habebit 25. Quartus autem habebat unum et 3 octavas rei, igitur habebit 28. Primus autem habebat unum. Igitur scimus iam quid habeat quisque eorum.

In hoc autem capitulo possunt¹³⁴ fieri multe alie questiones.

⟨Capitulum conventionum negotiatorum.⟩

Scias quod conventiones negotiationis hominum omnes que sunt de emptione et venditione et cambitione et conductione et ceteris rebus sunt secundum duos modos cum 4 numeris quibus interrogator loquitur, qui sunt appretiatum et pretium secundum positionem, et appretiatum et pretium secundum querentem. Numerus vero qui est appretiatum secundum positionem opponitur numero qui est pretium secundum querentem. Et numerus qui est pretium secundum positionem opponitur numero qui est appretiatum secundum querentem. Horum vero quatuor numerorum 3 semper manifesti et noti, et unus est ignotus, qui est ille qui verbo loquentis notatur per 'quantum' et de quo interrogator querit.

Regula ergo in hoc est ut consideres 3 numeros manifestos; impossibile est enim quin duo eorum sint, quorum unusquisque suo compari est oppositus. Multiplica igitur unumquemque duorum numerorum apparentium (sc.: manifestorum) oppositorum in alterum, et quod provenerit divide per alterum (sc.: alium = tertium) (numerum) (manifestum) cui numerus ignotus opponitur. Quod ergo provenerit est numerus ignotus pro quo querens interrogat, qui etiam est oppositus numero per quem dividitur.

Cuius exemplum secundum primum modum eorum est ut querens interroget et dicat: 10 kaficii sunt pro 6 dragmis, quot ergo provenient tibi pro 4 dragmis?

Sermo itaque eius qui est '10 kaficii' est numerus appretiati secundum positionem; et eius sermo qui est '6 dragme' est numerus eius quod est pretium secundum po-

¹³² est bis in cod.

¹³³ rei pr. scr. et corr.

¹³⁴ possunt, cod.

sitionem; et ipsius sermo quo dicitur 'quantum te contingit' est numerus ignotus appretiati secundum querentem; et ipsius sermo qui est 'per 4 dragmas' (sc.: 'pro 4 dragmis') est numerus¹³⁵ qui est pretii secundum querentem. Numerus ergo appretiati (secundum positionem) qui est 10 kaficii opponitur numero qui est pretium secundum querentem, quod est 4 dragme. Multiplica ergo 10 in 4 qui sunt oppositi et manifesti, et erunt 40. Ipsum itaque per alium numerum manifestum divide, qui est pretium secundum positionem, quod est 6 dragme. Erit ergo 6 et due tertie, quod est numerus ignotus, qui est sermo dicentis 'quantum'. Ipse namque est appretiatum secundum querentem et opponitur 6, qui est pretium secundum positionem.

Modus autem secundus est sermo dicentis: Decem sunt pro 8, quantum est pretium 4? Aut forsitan dicit: 4 eorum quanti pretii sunt? Decem ergo est numerus appretiati secundum positionem, et ipse opponitur numero qui est pretii ignoti (secundum querentem) qui notatur per verbum illius 'quantum'; et 8 est numerus qui est pretium secundum positionem, ipse namque opponitur numero manifesto qui est appretiati (secundum querentem) qui est 4. Multiplica ergo duorum numerorum manifestorum et oppositorum unum in alterum, scilicet 4 in 8, et erunt 32. Et divide¹³⁶ quod provenierit per alium numerum manifestum qui est appretiati (secundum positionem), et est 10. Erit ergo quod proveniet (67^r) 3 et quinta, qui est numerus qui est pretium (secundum querentem). Et ipse est oppositus 10 per quem divisus¹³⁷ fuit. Et similiter erunt omnes conventiones¹³⁸ negotiationis (hominum) et earum regula.

Quod si aliquis querens interrogaverit et dixerit: Quendam operarium conduxi in mense pro 10 dragmis qui 6 diebus operatus est, quantum ergo contingit eum?

Tu autem iam scisti quod 6 dies sunt quinta mensis, et quod illud quod ipsum contingit ex dragmis est secundum quantitatem eius quod operatus est ex mense. Eius vero regula est quod mensis est 30 dies,¹³⁹ quod est appretiatum secundum positionem,¹⁴⁰ et sermo eius qui est '10 (dragme)' est pretium secundum positionem; eius vero sermo qui est '6 dies' est appretiatum secundum querentem; et sermo eius 'quantum contingit (eum)' est pretium secundum querentem. Multiplica ergo pretium secundum positionem, quod est 10, in appretiatum secundum querentem, quod est ei oppositum, et est 6, et provenient 60. Ipsum ergo divide per¹⁴¹ 30, qui est numerus manifestus, qui est appretiatum secundum positionem. Erit ergo illud due dragme, quod est pretium secundum querentem. Et similiter sunt omnia quibus homines in-

¹³⁵Post numerus scr. ignotus et del.

¹³⁶deinde, cod.

¹³⁷divisum, cod.

¹³⁸convenientes, cod.

¹³⁹dies bis scr. (vel forsán diebus pr. scr.) et del.

¹⁴⁰Recte: Eius vero regula est quod mensis —qui est 30 dies (forsán glossa Arabica)— est appretiatum secundum positionem.

¹⁴¹per 6 (ut vid.), 6 del.

*ter se conveniunt in negotiatione secundum cambium et mensurationem et ponderationem.*¹⁴²

III Notes sur les problèmes.

1. Deux hommes possédant chacun une certaine somme se rencontrent; l'un dit à l'autre qu'en recevant un de ses dirhams il aura autant que lui, et l'autre lui répond que si lui-même reçoit quatre dirhams de son compagnon il aura alors le double de sa somme. On demande quelles sont les sommes qu'ils possèdent.

Ainsi, si u et v représentent les sommes initiales,

$$\begin{aligned}u + 1 &= v - 1 \\2(u - 4) &= v + 4.\end{aligned}$$

1°) Par la méthode de fausse position.¹⁴³ Prenons $u_1 = 5$, d'où $v_1 = 7$. Les termes de la deuxième équation deviennent respectivement 2 et 11, l'erreur est donc $e_1 = 9$. Prenons maintenant $u_2 = 6$ (comme il le remarque lui-même, l'auteur prend en général comme seconde position $u_2 = u_1 + 1$, ou augmente le numérateur de 1 si la première est fractionnaire). Donc, $v_2 = 8$, en sorte que $2(u_2 - 4) = 4$ et $v_2 + 4 = 12$, et $e_2 = 8$. Par suite,

$$\begin{aligned}u &= \frac{u_2 e_1 - u_1 e_2}{e_1 - e_2} = 14, \\v &= \frac{v_2 e_1 - v_1 e_2}{e_1 - e_2} = 16.\end{aligned}$$

2°) Par l'algèbre. Posons $u = x - 1$, donc $v = x + 1$, ce qui remplit la première équation. La deuxième équation devient

$$2x - 10 = x + 5$$

d'où $x = 15$, $u = 14$, $v = 16$.

Ce problème est repris textuellement du *Liber augmenti et diminutionis* (n° 17 de la liste trouvée ci-après, Appendice A).

2. Un homme amène une pièce d'or à un changeur; il reçoit en échange 27 dirhams de deux espèces, dont 20 des uns ou 30 des autres équivaudraient à la pièce apportée. On demande combien il a reçu de dirhams de chaque espèce.

¹⁴²Suivent deux notes de lecteur, dont la première (s. XIV) imite le style des problèmes (*Quod si aliquis querans interrogaverit: Cum dicitur gramatica a grama, quod est lictera, et icos, quod est sciancia*).

¹⁴³Littéralement: calcul (*numeratio* = *ḥisāb*) par augmentation (*ziyāda*) et diminution (*nuqṣān*).

$$u + v = 1$$

$$20u + 30v = 27, \quad \text{ou} \quad U + V = 27.$$

1°) Par la méthode de fausse position. Prenant $u_1 = \frac{1}{4}$, donc $v_1 = \frac{3}{4}$, on obtiendra $U_1 = 5$ et $V_1 = 22 + \frac{1}{2}$, en sorte que $e_1 = \frac{1}{2}$. Prenant $u_2 = \frac{1}{2} = v_2$, on aura $U_2 = 10$, $V_2 = 15$, et $e_2 = -2$. Donc

$$U = \frac{U_2 e_1 - U_1 e_2}{e_1 - e_2} = \frac{15}{2 + \frac{1}{2}} = 6, \quad V = 21,$$

et donc $u = \frac{3}{10}$, $v = \frac{7}{10}$.

2°) Par l'algèbre. Posant $u = x$, on a $20x + 30(1 - x) = 27$, soit (après la transformation préalable usuelle en $20x + 30 = 30x + 27$, qu'omet le texte, puis la réduction),

$$x = \frac{3}{10} = u, \quad v = \frac{7}{10}.$$

C'est le problème n° 21 du *Liber augmenti et diminutionis*.

3. Un négociant double son avoir, puis fait don de 1 dirham; il double le reste, puis fait don de 2 dirhams; il double le reste, puis fait don de 3 dirhams. Sachant qu'il lui reste 10 dirhams à la fin, on recherche son bien initial.

Soit u la somme originelle. Il faut alors que

$$2[2(2u - 1) - 2] - 3 = 10.$$

1°) Par la méthode de fausse position. Avec $u_1 = 4$, on trouve 21 au lieu de 10, en sorte que $e_1 = 11$. Avec $u_2 = 5$, on trouve 29, donc $e_2 = 19$. Par suite,

$$u = \frac{u_2 e_1 - u_1 e_2}{e_1 - e_2} = \frac{21}{8} = 2 + \frac{5}{8}.$$

2°) Par l'algèbre. Avec $u = x$, on trouve $8x - 11 = 10$, puis $x = 2 + \frac{5}{8}$.

C'est le problème n° 9 du *Liber augmenti et diminutionis*. On trouve plus loin dans le texte (Libri, p. 328) une troisième résolution.

4. On vend 10 qāfiz de froment et d'orge, chaque qāfiz de froment pour 8 dirhams et deux qāfiz d'orge pour un dirham. Sachant que la somme obtenue fut de 50 dirhams, on désire déterminer le nombre de qāfiz de chaque sorte.

$$u + v = 10$$

$$8u + \frac{1}{2}v = 50.$$

1°) Par la méthode de fausse position. Prenons $u_1 = 1$; d'après la seconde équation, $v_1 = 84$, en sorte que $u_1 + v_1 = 85$, et donc $e_1 = 75$. Prenant maintenant $u_2 = 2$, on aura $v_2 = 68$, et donc $e_2 = 60$. Conséquemment,

$$u = \frac{u_2 e_1 - u_1 e_2}{e_1 - e_2} = 6, \quad v = 4.$$

2°) Par l'algèbre. Posant $u = x$, on aura $8x + \frac{1}{2}(10 - x) = 50$, d'où $\frac{15}{2}x = 45$, $x = 6 = u$, $v = 4$.

C'est le problème n° 22 du *Liber augmenti et diminutionis*.

5. Cent pièces d'or, les unes de Malaga et les autres de Valence, sont changées en sous (*solidi*) à raison de 5 sous pour une des premières et de 3 pour une des secondes. Sachant que l'on a obtenu 460 sous, déterminer le nombre des pièces d'or de chaque espèce.

$$\begin{aligned} u + v &= 100 \\ 5u + 3v &= 460. \end{aligned}$$

1°) Par la méthode de fausse position. Prenant $u_1 = 1$, on a $v_1 = 99$, d'où l'erreur $e_1 = -158$. Avec $u_2 = 2$, soit $v_2 = 98$, l'erreur devient -156 . Ainsi,

$$u = \frac{u_2 e_1 - u_1 e_2}{e_1 - e_2} = 80, \quad \text{et} \quad v = 20.$$

2°) Par l'algèbre. Posons $u = x$. Alors, $5x + 3(100 - x) = 460$, soit $x = 80 = u$ et $v = 20$.

C'est le problème n° 24 du *Liber augmenti et diminutionis*.

6. Deux hommes ont respectivement dix et vingt qāfiz de marchandise qu'ils vendent à deux mêmes prix, mais en quantités telles que chacun s'en revient avec le même gain, soit 30 dirhams.

Si u , v sont les quantités ainsi vendues par le premier et u' , v' celles qui le sont par le second, on aura

$$\begin{aligned} u + v &= 10 & u' + v' &= 20 \\ u + 4v &= 30 & u' + 4v' &= 30 \end{aligned}$$

Le choix de 1 et 4 pour les prix est sommairement expliqué au début du problème. Dans un système du type

$$\begin{aligned} U + V &= k \\ aU + bV &= l, \end{aligned}$$

avec a , b , k , l positifs ($a < b$) et des solutions U , V devant être elles aussi strictement

positives, on doit avoir $ak < l < bk$, les limites étant déterminées par les cas extrêmes (et exclus) où l'un de U , V est nul. Dans notre cas, les valeurs de k sont différentes pour les deux marchands et celles de l sont les mêmes. Avec les valeurs choisies pour les k et pour l , les conditions pour les deux prix deviennent respectivement $a < 3 < b$ et $a < \frac{3}{2} < b$, et les choix $a = 1$ et $b = 4$ sont les plus simples.

1°) Par la méthode de fausse position. Prenant dans le premier système $u_1 = 1$, on aura $v_1 = 9$ puis $e_1 = 7$. Prenant $u_2 = 2$, $v_2 = 8$ et $e_2 = 4$. Donc

$$u = \frac{u_2 e_1 - u_1 e_2}{e_1 - e_2} = 3 + \frac{1}{3}, \quad \text{et} \quad v = 6 + \frac{2}{3}.$$

On procéderait de la même manière, dit l'auteur, pour le second système (d'où $u' = 16 + \frac{2}{3}$, $v' = 3 + \frac{1}{3}$).

2°) On résoudrait par le mode algébrique comme on le fait dans le cas de la division de 10 en deux parties (donc en prenant pour les inconnues x et $10 - x$).¹⁴⁴

C'est le problème n° 25 du *Liber augmenti et diminutionis*.

7. Un groupe de personnes est disposé en cercle, et l'un des participants cache un anneau; le demandeur interroge une des personnes (qui sait où est l'anneau) pour déterminer son possesseur.

Supposons que l'anneau soit détenu par la $x^{\text{ième}}$ personne comptée depuis la personne interrogée.

1°) Le demandeur fait effectuer à la personne interrogée une suite de calculs correspondant à

$$10[5(2x + 5) + 10] - 400.$$

Lui-même compte 1 pour le 400 soustrait puis 1 pour chaque centaine qui peut être enlevée du reste. Le résultat sera x , puisque

$$\frac{10[5(2x + 5) + 10] - 400}{100} = \frac{100x - 50}{100} = (x - 1) + \frac{1}{2},$$

dont la partie entière augmentée de l'unité précédemment comptée fait x .¹⁴⁵

2°) La règle utilisée ici est encore plus banale, mais sa simplicité est à nouveau masquée par les questions du demandeur. La personne questionnée tient x "dans chaque main", le demandeur 1 dans la sienne. Soit k un nombre choisi, connu des deux personnes. Le participant interrogé multiplie ce qu'il a dans une main par k

¹⁴⁴Allusion aux «problèmes des dix» (*masā'il al-ʿaḥarāt*), systèmes de deux équations de la forme $u + v = 10$, $f(u, v) = k$, k donné, qui apparaissent dans presque tous les manuels d'algèbre en arabe.

¹⁴⁵Sur les apparitions dans l'histoire de ce genre de problèmes (comme par ailleurs de presque tous les autres de notre extrait), voir J. Tropicke (*et al.*), *Geschichte der Elementarmathematik* (Berlin 1980⁴), § 4.2.6.

(il obtient donc kx), puis divise le résultat par ce qu'il a dans l'autre main (il aura alors k), enfin soustrait x du quotient et communique le résultat (donc $k - x$) au demandeur. Celui-ci, qui a entre-temps aussi multiplié son unité par k , n'a plus qu'à en soustraire ce résultat pour connaître la réponse. Il faut naturellement qu'il ait choisi une valeur de k supérieure au nombre des participants.

3°) Par les calculs successifs, on obtient

$$x + 2x + \frac{x + 2x}{2} = \frac{9x}{2}.$$

Pour chaque 9 que la personne interrogée peut soustraire du résultat, le demandeur compte 2; s'il y a un reste (x est impair), il compte 1. Il obtiendra ainsi $x = 2m$ ou $x = 2m + 1$.

4°) Calculant d'abord $\frac{3x}{2}$, on obtiendra

- soit, si $x = 2m + 1$, la quantité $\frac{6m+3}{2}$, que l'on arrondira à $3m + 2$
- soit, si $x = 2m$, la quantité $3m$.

Multipliant alors le résultat par 3, on aura $9m + 6$ ou $9m$. Procédant comme dans la méthode précédente avec des soustractions successives de 9, en comptant 2 par soustraction effectuée et y ajoutant 1 pour le cas de la fraction arrondie, le demandeur obtiendra $2m + 1$ ou $2m$, soit la valeur de x . Le cas où aucune soustraction n'est possible et où il n'y a pas non plus de reste correspond à la situation dans laquelle le nombre de départ était $x = 0$.

Ce problème et le suivant terminent la traduction latine du *Liber augmenti et diminutionis*.

8. Trois hommes cachent chacun un objet différent, et le demandeur doit déterminer le détenteur de chaque objet.

Pour parvenir à ce but, le demandeur attribue à chacun des trois objets un certain nombre, et il attribue de même à chaque homme un nombre. Chacun des participants ayant multiplié son nombre par le nombre de l'objet qu'il recèle, et la somme seule ayant été communiquée au demandeur, celui-ci sera à même de désigner successivement le possesseur du premier, du second, puis du troisième objet.

Soient en effet trois entiers positifs r, s, t et $t = \lambda + \mu + \nu$, avec λ, μ, ν entiers positifs différents et $r > s > \lambda, \mu, \nu$. Attribuons d'abord à chaque homme l'un quelconque des trois nombres λ, μ, ν , par exemple λ à l'homme recelant le premier objet, μ à celui qui cache le second et ν au détenteur du troisième. Associons ensuite au premier objet la quantité $r - s$, au second objet $r - 1$, au troisième objet r . Lorsque la somme $\lambda(r - s) + \mu(r - 1) + \nu r$ sera communiquée au demandeur, il la soustraira de $r \cdot t$ puis divisera le reste par s ; alors λ apparaîtra comme quotient et

μ comme reste, puisque

$$\frac{r \cdot t - [\lambda(r - s) + \mu(r - 1) + \nu r]}{s} = \frac{\lambda s + \mu}{s} = \lambda + \frac{\mu}{s}.$$

On voit donc pourquoi s devra être choisi en sorte d'être supérieur aux parties de t .

Exemple: $r = 10$, $s = 8$, donc 2, 9, 10 seront les quantités respectivement attribuées aux objets. Prenons $t = 10$, et par exemple $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\nu = 5$.

Comme

$$\frac{100 - (4 + 27 + 50)}{8} = \frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8},$$

l'homme λ détient le premier objet (de quantité attribuée 2) et l'homme μ le second (de quantité 9). C'est l'exemple de notre texte (on aurait pu tout aussi bien considérer $t = 3 + 6 + 1$ ou $t = 4 + 1 + 5$). La plus petite valeur possible pour t est $6 = 1 + 2 + 3$; elle est utilisée par Léonard de Pise dans un exemple de son *Liber abaci*.¹⁴⁶

9. Des ouvriers en nombre inconnu ont des salaires en progression arithmétique; sachant que la somme des salaires est 120, que le moindre est 3 et le plus élevé 21, déterminer le nombre des ouvriers.

Soient s_i le salaire du $i^{\text{ième}}$ des n ouvriers, avec $s_i = s_1 + (i - 1)d$, et $S = \sum s_i$; on a alors la relation

$$S = \frac{n}{2}(s_1 + s_n),$$

d'où, dans le présent problème,

$$n = \frac{2S}{s_1 + s_n} = 10.$$

La seconde résolution, algébrique, utilise la même formule.

Ce problème ne se trouve pas dans les manuscrits conservés du *Liber mahameleth*, mais il n'y a aucun doute qu'il en soit extrait: tant son texte que ses données numériques le rattachent étroitement aux neuf problèmes similaires de sa section intitulée *de varietate mercedis operariorum*. Le problème renvoie du reste à la formule utilisée dans les problèmes précédents du *Liber mahameleth*. On verra dans ce qui suit aussi que l'auteur de notre extrait recopie indistinctement les renvois à des problèmes qu'il n'a pas reproduits.

10. Ce problème et les suivants sont des applications de la règle de trois composée, dont le *Liber mahameleth* a un nombre considérable d'exemples. Dans ce problème-

¹⁴⁶ Edition de B. Boncompagni (*Scritti di Leonardo Pisano*, I, Rome 1857), pp. 307-8.

ci, on sait qu'un transporteur recevrait un salaire s_1 pour porter un poids p_1 sur une distance d_1 , et l'on demande de déterminer selon les mêmes critères des grandeurs s_2 et d_2 connaissant p_2 et $s_2 + d_2$.

Comme le salaire est proportionnel au poids transporté et à la distance, on aura la relation

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{p_1 \cdot d_1}{p_2 \cdot d_2}$$

où $s_1 = 60$, $p_1 = 12$, $d_1 = 30$; $p_2 = 3$, $s_2 + d_2 = 15$.

Par la relation ci-dessus, on sait que

$$\frac{s_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot d_1} = \frac{s_2}{d_2}.$$

On en déduit d'abord que

$$\frac{s_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot d_1}{p_1 \cdot d_1} = \frac{s_2 + d_2}{d_2}$$

ce qui entraîne que

$$d_2 = \frac{p_1 \cdot d_1 (s_2 + d_2)}{s_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot d_1} = \frac{12 \cdot 30 \cdot 15}{60 \cdot 3 + 12 \cdot 30} = 10;$$

on en déduit aussi que

$$\frac{s_1 \cdot p_2}{s_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot d_1} = \frac{s_2}{s_2 + d_2}$$

ce qui entraîne que

$$s_2 = \frac{s_1 \cdot p_2 (s_2 + d_2)}{s_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot d_1} = (15 - d_2) = 5.$$

Notre texte n'a aucune explication, et la résolution est présentée comme l'application d'une recette. Dans le *Liber mahameleth*, duquel ce problème est copié, la situation est toute différente: comme ce problème est le cinquième de la section *de conducendis vectoribus* (ou *de vehendo*), le lecteur est censé connaître la relation sur laquelle repose le mode de résolution; pour le cas où il ne saurait pas l'appliquer, ce problème est complété par une démonstration géométrique qui établit la formule *more Euclidis*. Le choix de recopier ce problème, de plus incomplètement, paraît donc bien injustifié.

11. Si h_1 ouvriers taillent n_1 pierres en j_1 jours pour un salaire s_1 , on demande combien recevraient h_2 ouvriers ayant taillé n_2 pierres en j_2 jours.

Le texte distingue deux cas. Dans le premier, le salaire est payé aux ouvriers

proportionnellement au nombre de pierres taillées et au nombre de jours d'activité; deux groupes différents effectuant le même travail en un même temps recevront donc la même somme globale à se partager. Dans l'autre cas, le salaire est en plus proportionnel au nombre des ouvriers; ainsi, si deux groupes différents taillent un même nombre de pierres en un même nombre de jours, les ouvriers de chacun des groupes recevront le même salaire.

1°) Dans le premier cas, où le salaire ne tient pas compte du nombre d'ouvriers, on aura

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{n_1 \cdot j_1}{n_2 \cdot j_2},$$

d'où, avec les données ($s_1 = 60$, $h_1 = 3$, $n_1 = 4$, $j_1 = 30$; $h_2 = 2$, $n_2 = 2$, $j_2 = 10$),

$$s_2 = \frac{s_1 \cdot n_2 \cdot j_2}{n_1 \cdot j_1} = \frac{60 \cdot 2 \cdot 10}{4 \cdot 30} = 10.$$

2°) Dans le second cas, la relation à utiliser devient

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{h_1 \cdot n_1 \cdot j_1}{h_2 \cdot n_2 \cdot j_2},$$

d'où

$$s_2 = \frac{s_1 \cdot h_2 \cdot n_2 \cdot j_2}{h_1 \cdot n_1 \cdot j_1} = \frac{60 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10}{3 \cdot 4 \cdot 30} = 6 + \frac{2}{3},$$

soit les $\frac{2}{3}$ du salaire précédent.

Ce problème étant le premier de la section *de conducendis incisoriibus lapidum* du *Liber mahameleth*, sa résolution se suffit à elle-même —encore que l'allusion à diverses méthodes de résolution connues (concernant des problèmes de transporteurs) soit incongrue. Quant à l'explication du raisonnement sur lequel s'appuie la seconde formule, elle est reprise sans changement du *Liber mahameleth*.

Remarque: Comme, dans les deux cas distingués ci-dessus, le salaire est directement proportionnel au nombre des jours de travail, il apparaît que le même salaire sera indistinctement versé à un ouvrier taillant n pierres en j jours, à un ouvrier taillant une seule pierre en nj jours, ou encore à un ouvrier taillant nj pierres en un seul jour. Dans le premier des deux cas que distingue l'auteur, le même salaire sera aussi versé à h ouvriers effectuant le même travail dans le même temps, cependant que dans le second cas la somme versée, toujours pour une même activité, devra être h fois plus élevée. Donc, dans le second cas, h hommes taillant une seule pierre en nj jours coûteront autant qu'un ouvrier taillant à lui tout seul hnj pierres en un seul jour. Voilà qui permet de comprendre les équivalences insolites lues vers la fin du texte de ce problème.

12. Même type de problème, avec $s_1 = 60$, $h_1 = 5$, $j_1 = 30$, et $h_2 = 2$, $j_2 - s_2 = 2$. Le problème n'est pas résolu, mais le raisonnement serait analogue à celui du problème 10: puisque

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{h_1 \cdot j_1}{h_2 \cdot j_2},$$

on aura

$$\frac{j_2}{s_2} = \frac{h_1 \cdot j_1}{h_2 \cdot s_1},$$

d'où

$$\frac{j_2 - s_2}{s_2} = \frac{h_1 \cdot j_1 - h_2 \cdot s_1}{h_2 \cdot s_1}$$

respectivement

$$\frac{j_2}{j_2 - s_2} = \frac{h_1 \cdot j_1}{h_1 \cdot j_1 - h_2 \cdot s_1};$$

il en découle que

$$s_2 = \frac{h_2 \cdot s_1 (j_2 - s_2)}{h_1 \cdot j_1 - h_2 \cdot s_1}$$

et

$$j_2 = \frac{h_1 \cdot j_1 (j_2 - s_2)}{h_1 \cdot j_1 - h_2 \cdot s_1}.$$

Le *Liber mahameleth* a exactement ce qu'en a repris l'extrait: un énoncé sans la résolution. Mais ceci est dans le cas du *Liber mahameleth* justifié, car un même problème a été résolu dans la section précédente. L'extrait, lui, n'avait aucune raison de choisir un problème ainsi abrégé puisqu'il n'a pas reproduit le problème analogue.

13. Un berger qui garderait n_1 ($= 100$) brebis durant j_1 ($= 30$) jours pour un salaire s_1 ($= 10$) en gardera n_2 ($= 60$) durant j_2 ($= 20$) jours pour un salaire s_2 à déterminer. Or,

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{n_1 \cdot j_1}{n_2 \cdot j_2},$$

donc

$$s_2 = \frac{s_1 \cdot n_2 \cdot j_2}{n_1 \cdot j_1} = \frac{10 \cdot 60 \cdot 20}{100 \cdot 30} = 4.$$

Dans le *Liber mahameleth* la formule de résolution est expliquée, et le problème est en outre résolu différemment.

14. Si un ouvrier creuse une fosse de dimensions l_1 , d_1 , h_1 ($= 10$, 8 , 6) pour s_1 ($= 80$), que recevrait-il pour creuser une fosse de dimensions l_2 , d_2 , h_2 ($= 4$, 3 , 5)?

Comme

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{l_1 \cdot d_1 \cdot h_1}{l_2 \cdot d_2 \cdot h_2},$$

on aura

$$s_2 = \frac{s_1 \cdot l_2 \cdot d_2 \cdot h_2}{l_1 \cdot d_1 \cdot h_1} = \frac{80 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5}{10 \cdot 8 \cdot 6} = 10.$$

Là encore, notre extrait supprime une explication et une autre résolution, ainsi que le traitement analogue du cas d'une fosse cylindrique.

15. Si un menuisier engagé pour construire un coffre de dimensions l_1, d_1, h_1 reçoit s_1 , que recevra-t-il pour construire un coffre de dimensions l_2, d_2, h_2 ?

On ne doit pas procéder comme précédemment, contrairement à ce que pensent "beaucoup", précise le texte. En effet, le prix ne dépend pas du volume du coffre, mais de la grandeur de ses parois et donc de sa surface. Par suite on aura, selon les données,

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{2(l_1 \cdot d_1 + l_1 \cdot h_1 + d_1 \cdot h_1)}{2(l_2 \cdot d_2 + l_2 \cdot h_2 + d_2 \cdot h_2)} = \frac{2(10 \cdot 5 + 10 \cdot 8 + 5 \cdot 8)}{2(2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4)} = \frac{340}{52},$$

et ainsi, puisque $s_1 = 170$,

$$s_2 = \frac{52 \cdot 170}{340} = 26.$$

Le problème est recopié du *Liber mahameleth* dans son intégralité. Un infime changement est que le *Liber mahameleth* a "*multi putant hanc questionem similem esse questionibus de foveis*"; il valait la peine de remarquer cette différence, car c'est l'un des seuls endroits où l'auteur de notre extrait a manifesté quelque conscience de ce qu'il faisait.

16. Si $\frac{5}{4}$ d'un boisseau (*modius*) de Ségovie équivaut à $\frac{5}{3}$ d'un qāfiz de Tolède, à combien de boisseaux correspondront 20 qāfiz?

Ce problème, intégralement recopié du *Liber mahameleth*, est une application élémentaire de la règle de trois, dont le *Liber mahameleth* a quantité d'exemples dans sa section *de emendo et vendendo* (voir du reste la référence —comme toujours reproduite telle quelle par notre compilateur). Dans la résolution, on trouve d'abord le calcul

$$\frac{\frac{5}{4} \cdot 20}{\frac{5}{3}} = 15,$$

puis sa justification par l'établissement de la proportion; enfin, une autre résolution fait préalablement disparaître les fractions. Ce genre d'explication et de modification banale d'une résolution déjà exposée est caractéristique du *Liber mahameleth*;

n'oublions pas qu'il s'adressait à des lecteurs pour lesquels arithmétique et algèbre étaient des sciences entièrement nouvelles.

17. On change en 1200 sous cent morabitini (maravédis) de deux espèces, à savoir des pièces de Malaga valant chacune 15 sous et des pièces de Baeza valant chacune 10 sous; on demande combien il y avait de morabitini de chaque espèce.

Soient u le nombre des pièces de Malaga et v celui des pièces de Baeza. On a donc

$$\begin{aligned}u + v &= 100 \\ 15u + 10v &= 1200.\end{aligned}$$

Comme l'indique le texte, pour un système de la forme

$$\begin{aligned}u + v &= k \\ a_1u + a_2v &= l\end{aligned}$$

la condition de résolution est (pour avoir $u, v > 0$ si $a_1 > a_2 > 0$ et $k, l > 0$) que $a_2k < l < a_1k$, donc ici que $1000 < l < 1500$.¹⁴⁷

Quant à la solution, elle est calculée par les relations

$$u = \frac{l - a_2k}{a_1 - a_2}, \quad v = \frac{a_1k - l}{a_1 - a_2}$$

d'où $u = 40$, $v = 60$.

Ce problème est le pénultième de la section *de cambio morabitorum* du *Liber mahameleth*. Johannes Hispalensis ajoute à la résolution vue une démonstration géométrique ainsi qu'une seconde résolution.

18–19. Trois conduites mènent à une citerne, dont la première seule la remplirait en 1 jour, la seconde en $\frac{1}{2}$ jour, la troisième en $\frac{1}{3}$ de jour. En quelle fraction de jour sera-t-elle remplie par les trois conduites coulant simultanément?

Du fait que les conduites prises séparément rempliraient en un jour 1, 2, respectivement 3 citernes, elles en rempliraient ensemble 6 en un jour. Il leur faudra donc $\frac{1}{6}$ de jour pour qu'elles en remplissent une.

Le problème 19 ajoute un orifice qui laisse échapper l'eau au bas de la citerne, et qui sans apport extérieur la viderait en $\frac{1}{3}$ de jour. Ce ne seront donc plus que 3 citernes que rempliraient les conduites en un jour, en sorte que la citerne considérée sera pleine après $\frac{1}{3}$ de jour.

Les problèmes 18 et 19 sont les deux premiers de la section *de cisternis* du *Liber mahameleth*, qui contient aussi les deux problèmes ci-après.

¹⁴⁷Voir ci-dessus, problème 6. Cette condition apparaît déjà dans l'antiquité (problème I,5 de l'*Arithmetica* de Diophante).

20. Dans un bassin de dimensions données rempli d'eau, on jette une pierre de dimensions données. On demande de combien baissera le niveau de l'eau lorsqu'on retirera la pierre.

La résolution procéderait comme suit. Si v est le volume de la pierre (donc aussi celui de l'eau déplacée) et V celui du bassin, le rapport de la hauteur h de l'eau déplacée par la pierre à la hauteur totale H du bassin sera

$$\frac{h}{H} = \frac{v}{V};$$

on trouverait donc dans notre cas ($v = 3 \cdot 2 \cdot 1$, $V = 10 \cdot 8 \cdot 5$ et $H = 5$)

$$h = \frac{30}{400} = \frac{3}{40}.$$

L'indication de la contenance totale du bassin (1000 mesures) et de ce qui en déborderait après le jet de la pierre (15 mesures) n'est pas nécessaire à la résolution, ces deux éléments étant dans la même proportion que les volumes V et v que l'on sait déjà calculer.

Là encore, la résolution est abrégée par un renvoi qui n'a pas de sens dans notre extrait. Dans le *Liber mahameleth*, il y a six problèmes antérieurs de jets de pierres, où Johannes Hispalensis a présenté un même type de résolution.

21. Combien un tonneau (cylindrique) d'un diamètre de 10 coudées et d'une profondeur de 8 contiendra-t-il de mesures de vin (sachant que deux mesures de vin remplissent un récipient cubique d'une coudée au côté)?

Désignons par S , d , h respectivement la surface de la base, son diamètre, la hauteur du tonneau. Connaissant le diamètre, on obtiendra alors la surface

- soit en calculant directement $S = d^2 \left[1 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \right) \right]$;
- soit en calculant le périmètre du tonneau qui, «comme l'ont démontré les Anciens»,¹⁴⁸ vaut $d \left(3 + \frac{1}{7} \right)$, puis en multipliant sa moitié par la moitié du diamètre:

$$S = \frac{d^2}{4} \left(3 + \frac{1}{7} \right).$$

Le produit de la surface par la hauteur h du tonneau est ensuite doublé pour obtenir le nombre des mesures.

Le *sicut supra ostendimus* de la fin est à nouveau un renvoi à un problème antérieur d'un jet de pierre, dans un bassin à fonds carré, que n'a pas reproduit l'extrait.

¹⁴⁸ Archimède dans sa *Dimensio circuli*, où il établit que $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$; l'auteur du *Liber mahameleth* savait en fait fort bien qu'il s'agissait d'une approximation, comme cela apparaît d'un problème antérieur de découpage d'étoffe.

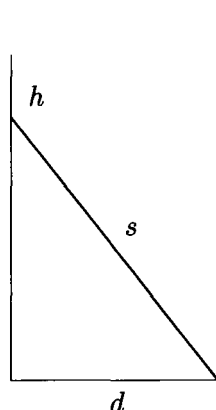


Figure 1

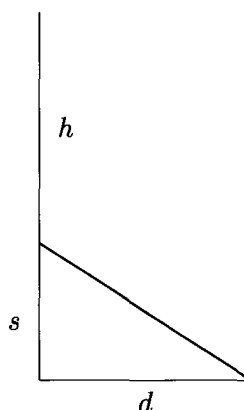


Figure 2

22–26, 29–31. Tous ces problèmes sont des applications simples du théorème de Pythagore.¹⁴⁹

Les problèmes 22–24 sont les trois premiers de huit problèmes d'échelles du *Liber mahameleth*; ils en sont les plus simples, et on les trouve déjà dans des tablettes cunéiformes. Il y est question d'une échelle de longueur s qui est appuyée contre un mur de même hauteur; lorsque son sommet s'abaisse de h , son pied s'éloigne du pied du mur de d (Fig. 1). Ces trois grandeurs sont liées par la relation

$$s^2 = (s - h)^2 + d^2.$$

Dans le problème 22, on donne $s = 10$ et $d = 6$, et l'on calcule $s - h$ pour trouver h ; dans le suivant, $s = 10$ et $h = 2$ permettent de déterminer d ; enfin, on recherche s dans le dernier problème partant des mêmes valeurs $d = 6$ et $h = 2$ et grâce à la relation

$$s - h = \frac{d^2 - h^2}{2h}.$$

Dans les trois cas, le *Liber mahameleth* a d'abord une résolution par un calcul arithmétique (qui est la partie reproduite dans l'extrait), puis une justification géométrique de la formule utilisée, enfin une résolution algébrique.

Dans les problèmes 25–26, un arbre est brisé à une hauteur s au-dessus du sol, et la partie pendante, de longueur h ($> s$), rencontrera le sol à une distance d du pied de l'arbre (Fig. 2). Donc

$$h^2 = s^2 + d^2.$$

Le *Liber mahameleth* a quatre tels problèmes d'arbre, qui sont placés à la suite des

¹⁴⁹La section correspondante du *Liber mahameleth* a été publiée et analysée dans *Centaurus*, 30 (1987), pp. 18–61.

problèmes d'échelle; notre extrait en reproduit, sans leur démonstration géométrique, le premier et le troisième. Dans le premier cas, $s + h = 30$ et $s = 10$, d'où $d = \sqrt{300}$; par la formule d'approximation

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{r}{2a} \quad \text{avec} \quad a < \sqrt{N} < a + 1 \quad (a \text{ entier}) \quad \text{et} \quad r = N - a^2,$$

connue déjà dans l'antiquité et enseignée dans la première partie du *Liber mahameleth*, on trouve $d \approx 17 + \frac{11}{34}$. Dans le problème 26, on connaît $s = 6$ et $d = 8$, en sorte que l'on peut calculer h et déterminer $s + h$.

Les problèmes 29–31 sont copiés des trois problèmes de deux tours qui, dans le *Liber mahameleth*, closent la section des applications du théorème de Pythagore. Deux tours de hauteurs s_1, s_2 ($s_1 > s_2$) ont leurs pieds distants de d et leurs sommets de r (Fig. 3). Par suite

$$r^2 = d^2 + (s_1 - s_2)^2.$$

Dans le problème 29, $s_1 = 30$, $s_2 = 20$, $d = 8$; on trouve ainsi que $r^2 = 164$ et, par la formule d'approximation déjà utilisée, que $r \approx 12 + \frac{5}{6}$. Dans le problème suivant, ces valeurs de s_1, s_2, r sont reprises, et devraient servir à calculer (approximativement) d — fidèle à lui-même, notre auteur n'a pas manqué de recopier l'allusion à la démonstration géométrique du problème précédent. Dans le problème 31, où $r = 10$, $d = 6$, et l'une des hauteurs est 18, on demande la hauteur de la deuxième tour. Alors que le *Liber mahameleth* considère successivement les deux cas où la hauteur cherchée est celle de la plus grande puis de la plus petite tour, l'extrait n'a que le premier cas — ou plutôt l'explication de la formule de résolution, puisque la détermination numérique n'apparaît dans le *Liber mahameleth* qu'avec la démonstration géométrique. L'auteur de notre compilation a toutefois copié la restriction indiquée à la suite du second cas, à savoir que l'on doit toujours avoir $r > d$.

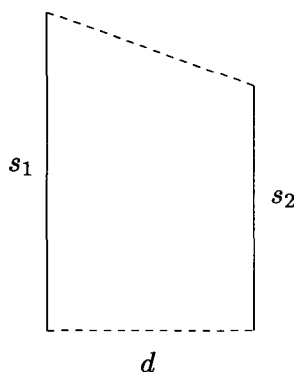


Figure 3

27–28, 32. Ces trois problèmes ne se trouvent pas dans le *Liber mahameleth* et n'ont d'autre rapport avec leurs voisins que l'objet considéré, arbre et tour. La manière servile de copier dont fait montre l'auteur de notre extrait amène à penser qu'il aurait pu recopier des gloses de lecteur trouvées dans sa copie du *Liber mahameleth*.

Les problèmes 27–28 concernent le nombre d'arbres que l'on peut planter en rangées à l'intérieur d'un terrain de dimensions l , d données avec un espacement r donné. La règle est

$$n = \left(\frac{l}{r} + 1 \right) \left(\frac{d}{r} + 1 \right).$$

Ainsi, pour $l = 20$, $d = 10$, $r = 2$, on pourra planter 66 arbres. Le second problème détermine l et d connaissant le nombre de rangées et leur contenu.

Ces deux problèmes pourraient bien ne pas remonter à une source orientale et avoir été directement transmis par quelque géométrie pratique en latin. On trouve en effet de mêmes problèmes résolus de la même manière dans les écrits d'agrimenseurs romains.¹⁵⁰

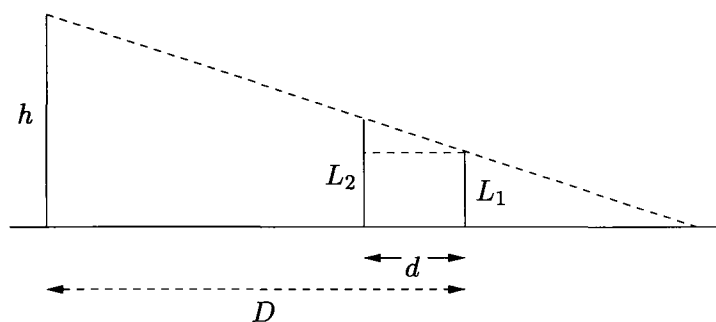


Figure 4

Quant au problème 32, il enseigne la détermination d'une hauteur h inconnue à l'aide de deux bâtons, de longueurs L_1 , L_2 connues, par la considération de triangles semblables. En effet, si ces bâtons sont fixés verticalement dans le sol en sorte que leurs sommets et celui de h soient alignés et que soient connues tant la distance d entre leurs pieds que la distance D entre le pied de h et celui du plus petit bâton, on aura (Fig. 4)

$$\frac{L_2 - L_1}{d} = \frac{h - L_1}{D}$$

en sorte que

$$h = \frac{D(L_2 - L_1)}{d} + L_1.$$

¹⁵⁰Chez Epaphroditus; voir M. Cantor, *Die römischen Agrimensoren* (Leipzig 1875), pp. 208–9 & 119; N. Bubnov, *Gerberti Opera omnia* (Berlin 1899), pp. 344–5, 523–4.

33–37. Le *Liber mahameleth* a cinq problèmes de fagots, tous intégralement recopiés dans notre extrait. Ces problèmes nous ramènent à l’usage de la règle de trois: si une corde de longueur l_1 entoure un fagot de n_1 baguettes, ou qui coûte p_1 , et une corde de longueur l_2 entoure un fagot de n_2 baguettes semblables, et coûtant p_2 , alors ces grandeurs seront associées par la relation

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Dans le problème 33, on donne $l_1 = 4$, $n_1 = 100$, $l_2 = 10$, et l’on calcule $n_2 = 625$. Dans le suivant, $l_1 = 4$, $l_2 = 12$, et l’on recherche le rapport $n_2 : n_1$. Le problème 35 fait apparaître les prix: $l_1 = 4$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $l_2 = 12$ (l’allusion de Johannes Hispalensis à Euclide concerne le théorème XII,2 des *Eléments*). Les deux derniers problèmes, où l’on recherche l_2 , font intervenir des racines; on connaît dans un cas $l_1 = 10$, $n_1 = 1000$, $n_2 = 250$, dans l’autre $l_1 = 3$, $p_1 = 18$, $p_2 = 2$.

38–39. Problèmes de poursuite. Un premier messenger avance de r_1 par jour, puis un second, avançant quotidiennement de r_2 ($r_2 > r_1$), est envoyé à sa poursuite après j jours. On calculera le nombre de jours qu’il mettra à le rattraper en égalant les trajets parcourus durant les nombres respectifs j_i de jours de voyage:

$$j_1 \cdot r_1 = j_2 \cdot r_2$$

où $j_2 = j_1 - j$, et donc $j_1(r_2 - r_1) = j \cdot r_2$.

Dans le problème 38, $r_1 = 20$, $j = 5$, $r_2 = 30$, d’où

$$j_2 = j_1 - j = \frac{j \cdot r_2}{r_2 - r_1} - j = \frac{j \cdot r_1}{r_2 - r_1} = 10.$$

Johannes Hispalensis joint, comme d’habitude, une démonstration géométrique et une résolution algébrique. En revanche, les problèmes qui suivent dans le *Liber mahameleth*, et qui terminent l’ouvrage, ne comprendront plus d’additions. Du reste, à partir de maintenant, l’auteur de notre extrait recopiera intégralement le texte de Johannes Hispalensis, et ceci jusqu’à sa fin.

Das le problème 39, on donne, outre $r_1 = 20$ et $j = 15$, la distance $d (= j_1 \cdot r_1) = 400$ parcourue jusqu’à la rencontre, et l’on recherche r_2 . On aura alors

$$r_2 = \frac{j_1 \cdot r_1}{j_2}, \quad \text{avec} \quad j_2 = \frac{d}{r_1} - j = \frac{d - j \cdot r_1}{r_1} = 5, \quad \text{et ainsi} \quad r_2 = 80.$$

40–44. Ces cinq problèmes sont du même type. Un mobile avance de a durant une partie du jour et recule de r ($< a$) durant la partie restante. On demande en combien de temps il couvrirait une distance d ($> a$).

On considère implicitement que la vitesse de déplacement est uniforme. Le mou-

vement d'avance aura donc lieu durant la partie $\frac{a}{a+r}$ du jour, celui de recul durant la partie $\frac{r}{a+r}$. En outre, il est sensé de supposer que, dès que le but a été atteint, le mouvement cesse.

Considérons la distance $d - a$. Il est clair qu'elle sera intégralement parcourue par les deux mouvements quotidiens, d'avance et de recul. Elle sera donc couverte en

$$\frac{d-a}{a-r} \text{ jours}$$

où $\frac{d-a}{a-r} = q + \frac{t}{a-r}$, $q = \left[\frac{d-a}{a-r} \right]$ étant la partie entière du quotient et $t < a-r$ le reste.

1°) Si $t = 0$, il ne restera à parcourir de la distance d qu'une partie égale à a . Le mouvement d'avance y suffira, et le but sera donc atteint après la partie $\frac{a}{a+r}$ du jour $q + 1$. La formule donnant la durée en jours du parcours sera donc dans ce cas

$$N = \frac{d-a}{a-r} + \frac{a}{a+r} = \frac{d-r}{a-r} - \frac{r}{a+r}.$$

2°) Si $t \neq 0$, il restera la distance $a + t$ à parcourir. Comme elle est supérieure à a , elle ne saurait être couverte durant le jour $q + 1$; à la fin de ce jour, il restera en effet encore $r + t$ à parcourir. Mais $t < a - r$ et donc $r + t < a$, en sorte que le mouvement d'avance au jour $q + 2$ permettra d'atteindre le but, le mobile y parvenant après la fraction $\frac{r+t}{a+r}$ du jour. Le mouvement aura donc duré en tout

$$N = \left[\frac{d-a}{a-r} \right] + 1 + \frac{r+t}{a+r} \text{ jours}$$

et la formule à utiliser sera donc dans ce cas

$$N = \left[\frac{d-r}{a-r} \right] + \frac{r+t}{a+r}.$$

L'auteur du *Liber mahameleth* commet l'erreur d'utiliser cette dernière formule indistinctement dans les cas où $t = 0$ et $t \neq 0$. Trois de nos quatre problèmes sont ainsi faux, les résultats étant trop grands de $\frac{2r}{a+r}$.

Dans le premier problème (n° 40), celui d'un bateau, $d = 300$ avec $a = 20$, $r = 5$. Donc $\left[\frac{d-a}{a-r} \right] = 18$ et $t = 10$. Le texte utilise, correctement, la seconde formule et trouve donc $N = 19 + \frac{3}{5}$.

Dans les quatre problèmes qui suivent, un serpent sort d'une cage de même longueur que lui. Comme il a été dit, la résolution utilise la relation erronée

$$N' = \frac{d-r}{a-r} + \frac{r}{a+r} \text{ à la place de } N = \frac{d-r}{a-r} - \frac{r}{a+r}$$

et ajoute donc la fraction qu'il faudrait soustraire. Dans le premier de ces quatre

problèmes (n° 41), $a = \frac{1}{3}d$ et $r = \frac{1}{4}d$, où d est la longueur du serpent; le résultat calculé est ainsi $9 + \frac{3}{7}$ (au lieu de $8 + \frac{4}{7}$). On donne dans le suivant (n° 42) $d = 7$, $a = 1$, $r = \frac{1}{3}$, et le texte trouve $10 + \frac{1}{4}$ (correct: $9 + \frac{3}{4}$). Le problème n° 43, similaire au problème 41 —avec $a = \frac{1}{3}d$, $N' = 9 + \frac{3}{7}$, r cherché—, de même que le dernier (n° 44) qui, avec $d = 7$, $a = 1$, $N' = 10 + \frac{1}{4}$, se rattache au problème 42, donnent une réponse juste en utilisant une formule réunissant les deux valeurs, correcte (!) et erronée, pour le nombre de jours, à savoir

$$r = \frac{aN' - d}{N}.$$

De ces cinq problèmes du *Liber mahameleth*, ceux qui correspondent aux numéros 41, 42, 44 se retrouvent presque textuellement dans l'Arithmétique de l'Égyptien 'Alī le Calculateur (texte reproduit dans l'Appendice C).

45–48. Les problèmes 45–47 sont des problèmes de doublements successifs, chaque membre d'un groupe de personnes doublant à tour de rôle l'avoir des autres participants, en sorte que les biens finals seront égaux. La règle utilisée a certainement été établie en considérant les pas du problème pris à rebours, donc en partant de la situation finale.

Soient en effet $S_1, S_2, \dots, S_n$ avec $\sum S_i = S$ les biens initiaux et $C, C, \dots, C$ avec $n \cdot C = S$ les biens finals. Avant la distribution par le $n^{\text{ième}}$, les avoirs respectifs devaient être

$$\frac{1}{2}C, \frac{1}{2}C, \dots, \frac{1}{2}C, y_n,$$

avec donc $y_n = \frac{n-1}{2}C + C = \frac{n+1}{2}C$.

Avant la distribution par le $(n-1)^{\text{ième}}$, les avoirs devaient être

$$\frac{1}{4}C, \frac{1}{4}C, \dots, \frac{1}{4}C, y_{n-1}, \frac{n+1}{4}C,$$

avec donc $y_{n-1} = \frac{n-2}{4}C + \frac{1}{2}C + \frac{n+1}{4}C = \frac{2n+1}{4}C$.

Avant la distribution par le $(n-2)^{\text{ième}}$, on avait

$$\frac{1}{8}C, \frac{1}{8}C, \dots, \frac{1}{8}C, y_{n-2}, \frac{2n+1}{8}C, \frac{n+1}{8}C$$

avec donc $y_{n-2} = \frac{n-3}{8}C + \frac{1}{4}C + \frac{2n+1}{8}C + \frac{n+1}{8}C = \frac{4n+1}{8}C$.

On en déduit déjà la règle que le bien initial du $i^{\text{ième}}$ participant devait être

$$S_i = \frac{2^{n-i} \cdot n + 1}{2^n}C.$$

C étant indéterminé, on peut poser $C = 2^n$, et l'on aura ainsi

$$S_i = 2^{n-i} \cdot n + 1,$$

ou, comme l'exprime le texte,

$$S_n = n + 1, S_{n-1} = 2S_n - 1, S_{n-2} = 2S_{n-1} - 1, \dots$$

Le problème 45 fait intervenir trois hommes. On trouve donc que le troisième aura 4, le deuxième 7, le troisième 13 (ainsi $S = 24$ et $C = 8$).

Dans le problème 46 de quatre hommes, on trouve $S_4 = 5$, $S_3 = 9$, $S_2 = 17$, $S_1 = 33$ (donc $S = 64$, $C = 21$).

Le problème 47 impose $S = 72$ pour trois hommes. Il suffit de multiplier par 3 les résultats obtenus dans le problème 45, et c'est ce que fait l'auteur.

Dans le problème 48, les biens finals ne sont plus égaux mais ont des différences données. Le calcul est effectué, comme le mentionne Johannes Hispalensis, "à rebours" ((*secundum*) *almencum* = *al-mankūs*¹⁵¹):

Tenant compte des différentes données, les biens finals seront de la forme

$$C_3 = C, C_2 = C + 1, C_1 = C_2 + 2 = C + 3.$$

Avant la dernière distribution (par le troisième), les biens étaient respectivement

$$\frac{C+3}{2}, \frac{C+1}{2}, y_3,$$

avec

$$y_3 = \frac{C+3}{2} + \frac{C+1}{2} + C = \frac{4C+4}{2}.$$

Avant la distribution précédente, les biens étaient

$$\frac{C+3}{4}, y_2, \frac{4C+4}{4}$$

avec

$$y_2 = \frac{C+3}{4} + \frac{C+1}{2} + \frac{4C+4}{4} = \frac{7C+9}{4}.$$

¹⁵¹On dit dans le même sens *al-mun'akis* ou *al-ma'kūs*; ces mots sont souvent interchangeables, comme me l'a fait remarquer M. P. Kunitzsch. C'est la règle *infusa* ou *versa* mentionnée au §3 de l'Introduction.

Enfin, avant la distribution par le premier, on avait

$$y_1, \frac{7C+9}{8} = S_2, \frac{4C+4}{8} = S_3,$$

avec

$$y_1 = \frac{C+3}{4} + \frac{7C+9}{8} + \frac{4C+4}{8} = \frac{13C+19}{8} = S_1.$$

Le problème étant indéterminé, C peut être choisi arbitrairement. L'auteur du *Liber mahameleth* pose au début $C = 5$, et parvient donc aux résultats $S_1 = 10 + \frac{1}{2}$, $S_2 = 5 + \frac{1}{2}$, $S_3 = 3$.

49–51. Le *Liber mahameleth* —et, pour les problèmes, notre extrait— s'achève avec le type très classique dit de l'achat d'un cheval, qui sera ultérieurement l'une des espèces de systèmes linéaires dans lesquelles les variations des coefficients amèneront à considérer des solutions négatives.¹⁵² Des personnes en nombre n désirent chacune acheter un cheval, mais aucune n'a suffisamment d'argent à elle seule; chacun des participants atteindra toutefois le prix du cheval en empruntant une fraction de l'avoir de ses voisins immédiats pris dans un ordre cyclique. Dans nos trois problèmes, l'emprunt est fait deux fois au voisin (49–50), une fois aux $n - 1$ autres participants (51, repris de l'Algèbre d'Abū Kāmil, où il ouvre la partie des problèmes récréatifs).

La formule appliquée dans les deux premiers problèmes s'établit comme suit. Soient x_i le bien du $i^{\text{ième}}$ partenaire, y le prix du cheval et $\frac{1}{q_i}$ la fraction donnée. Le système proposé a alors la forme

$$x_i + \frac{1}{q_i} x_{i+1} = y \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{cycliquement}).$$

Donc

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= q_i y - q_i x_i = q_i y - q_i [q_{i-1} y - q_{i-1} x_{i-1}] = [q_i - q_i q_{i-1}] y + q_i q_{i-1} x_{i-1} \\ &= [q_i - q_i q_{i-1} + q_i q_{i-1} q_{i-2}] y - q_i q_{i-1} q_{i-2} x_{i-2} \\ &= \dots \\ &= [q_i - q_i q_{i-1} \pm \dots + (-1)^{n+1} q_i q_{i-1} \dots q_{i+1}] y + (-1)^n q_i q_{i-1} \dots q_{i+1} x_{i+1} \end{aligned}$$

et l'on peut donc écrire

$$x_{i+1} \left[(-1)^{n+1} \prod_{k=1}^n q_k + 1 \right] = y \left[\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \prod_{l=0}^j q_{i-l} \right]$$

¹⁵²Voir l'étude «The appearance of negative solutions in mediaeval mathematics», in *Archive for history of exact sciences*, 32 (1985), pp. 105–150.

ou

$$x_{i+1} \left[\prod_{k=1}^n q_k + (-1)^{n+1} \right] = y \left[\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n+(j+1)} \prod_{l=0}^j q_{i-l} \right].$$

On peut alors identifier les facteurs, et l'on obtient

- si n est pair:

$$\begin{aligned} y &= \prod_{k=1}^n q_k - 1 = q_1 q_2 \cdots q_n - 1 \\ x_{i+1} &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} \prod_{l=0}^j q_{i-l} = q_i q_{i-1} \cdots q_{i+1} - q_i q_{i-1} \cdots q_{i+2} \pm \cdots + q_i q_{i-1} - q_i \\ &= q_i \{ q_{i-1} [q_{i-2} (\cdots [q_{i+1} - 1] \cdots) + 1] - 1 \} \end{aligned}$$

- si n est impair:

$$\begin{aligned} y &= \prod_{k=1}^n q_k + 1 = q_1 q_2 \cdots q_n + 1 \\ x_{i+1} &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \prod_{l=0}^j q_{i-l} = q_i q_{i-1} \cdots q_{i+1} - q_i q_{i-1} \cdots q_{i+2} \pm \cdots - q_i q_{i-1} + q_i \\ &= q_i \{ q_{i-1} [q_{i-2} (\cdots [q_{i+1} - 1] \cdots) - 1] + 1 \}. \end{aligned}$$

x_{i+1} et y étant ainsi déterminés (à un facteur multiplicatif près si y n'est pas donné), on peut en déduire toutes les autres inconnues en utilisant les équations du système; on calculera ainsi successivement:

$$\begin{aligned} x_{i+2} &= q_{i+1}(y - x_{i+1}) \\ x_{i+3} &= q_{i+2}(y - x_{i+2}) \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Ce sont, sous une forme générale, les relations qu'utilise l'auteur dans ses cas de $n = 3$ et $n = 4$; il souligne la dépendance entre la parité de n et le signe de l'unité dans la relation pour y .

Dans le problème 49, où $n = 3$, on a $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 4$, et par suite

$$\begin{aligned} y &= q_1 q_2 q_3 + 1 = 25, \\ x_1 &= q_3 (q_2 [q_1 - 1] + 1) = 16, \\ x_2 &= q_1 (y - x_1) = 18, \\ x_3 &= q_2 (y - x_2) = 21. \end{aligned}$$

Dans le problème 50, $n = 4$, avec $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 4$, $q_4 = 5$; donc

$$\begin{aligned}y &= q_1 q_2 q_3 q_4 - 1 = 119, \\x_1 &= q_4 \{q_3 (q_2 [q_1 - 1] + 1) - 1\} = 75, \\x_2 &= q_1 (y - x_1) = 88, \\x_3 &= q_2 (y - x_2) = 93, \\x_4 &= q_3 (y - x_3) = 104.\end{aligned}$$

Le problème 51, où chacun emprunte une fraction donnée de l'avoir de tous les autres, a la forme générale

$$x_i + \frac{1}{q_i} \sum_{k \neq i} x_k = y \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{cycliquement.}^{153}$$

Dans l'exemple choisi, $n = 4$ avec $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 4$, $q_4 = 5$. Le système a donc la forme

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4) = y \tag{1}$$

$$x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1) = y \tag{2}$$

$$x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_1 + x_2) = y \tag{3}$$

$$x_4 + \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3) = y. \tag{4}$$

La résolution procède comme suit. En posant $x_1 = 1$ (le problème est indéterminé) et $x_2 + x_3 + x_4 = x$, on aura

$$\begin{aligned}S = \sum x_j &= x + 1, \quad \text{et (selon la première équation)} \\y &= \frac{1}{2}x + 1.\end{aligned}$$

Les autres équations sont considérées sous une forme qui a été transformée de la manière suivante. Prenons par exemple la seconde équation, et multiplions-la par 3; elle deviendra alors

$$3x_2 + (x_3 + x_4 + x_1) = 3y = \frac{3}{2}x + 3,$$

¹⁵³Ce système et son histoire sont traités en détail dans l'article mentionné dans la note précédente.

d'où, en enlevant S de chaque côté,

$$2x_2 = \frac{1}{2}x + 2,$$

donc

$$x_2 = \left(\frac{1}{2} (3y - S) \right) = \frac{1}{4}x + 1.$$

Les deux autres équations deviennent similairement

$$x_3 = \left(\frac{1}{3} (4y - S) \right) = \frac{1}{3}x + 1,$$

$$x_4 = \left(\frac{1}{4} (5y - S) \right) = \frac{3}{8}x + 1.$$

Par suite,

$$x_2 + x_3 + x_4 = x = \frac{23}{24}x + 3,$$

donc $x = 72$, d'où $y = 37$, $x_1 = 1$, $x_2 = 19$, $x_3 = 25$, $x_4 = 28$. C'est une résolution assez proche de celle que l'on trouve déjà dans l'antiquité grecque (problème I, 25 de l'*Arithmetica* de Diophante).

Johannes Hispalensis avait annoncé une résolution algébrique de ce problème qui serait différente de celle qu'a présentée Abū Kāmil. Ce dernier en expose en fait deux dans son Algèbre, dont l'une est dite être usuelle cependant que l'autre est de son invention (fol. 95^r–97^r de son traité).¹⁵⁴

Soit donc le système

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4) = y \tag{1}$$

$$x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1) = y \tag{2}$$

$$x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_1 + x_2) = y \tag{3}$$

$$x_4 + \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3) = y. \tag{4}$$

a.) Le premier traitement est celui qu'exposent "les mathématiciens" habituellement.

¹⁵⁴Une reproduction photographique de l'unique (et excellent) manuscrit arabe de son traité a été publiée en 1986 par l'Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften de Francfort (Veröffentlichungen, Reihe C, Bd. 24).

Mettant en égalité les deux premières équations, on obtient

$$x_2 = \frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$

que l'on introduit dans la seconde équation, d'où

$$y = \frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4. \quad (5)$$

Mettant en égalité les expressions (3) et (5), on obtient

$$x_3 = \frac{13}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_4$$

que l'on introduit dans les équations précédentes pour x_2 et y , parvenant ainsi à

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{11}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_4 \\ y &= \frac{17}{5}x_1 + \frac{6}{5}x_4. \end{aligned}$$

Introduisant alors les relations trouvées successivement pour x_3 , x_2 , y dans (5), nous obtenons

$$x_4 = 28x_1.$$

Posant par exemple $x_1 = 1$, il viendra $x_2 = 19$, $x_3 = 25$, $x_4 = 28$, $y = 37$.

b.) Abū Kāmil considère comme plus simple et plus approprié à un nombre croissant d'inconnues le traitement suivant, qu'il s'attribue.¹⁵⁵

Posons $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = S$. Comme $x_2 + x_3 + x_4 = S - x_1$, l'équation (1) devient

$$y = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}S. \quad (5)$$

De même, $x_1 + x_3 + x_4 = S - x_2$, et l'équation (2) devient

$$y = \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}S. \quad (6)$$

¹⁵⁵La simplification concerne principalement le nombre de dénominations qu'il faut introduire dans la résolution pour désigner les inconnues auxiliaires. Dans le premier cas, les expressions de $n - 2$ inconnues sont conservées jusqu'à la fin; dans le second cas, en revanche, elles sont éliminées au fur et à mesure, en sorte que la même dénomination peut être utilisée à nouveau pour une autre inconnue.

Egalant (5) et (6), on obtient

$$\frac{2}{3}x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}S,$$

soit $x_2 = \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}S$.

Enfin, comme $x_1 + x_2 + x_4 = S - x_3$, l'équation (3) devient

$$y = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}S,$$

qui, égalé à (5), donne

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x_3 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}S, \quad \text{donc} \\ x_3 &= \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}S. \end{aligned}$$

De la sorte, on aura

$$\begin{aligned} x_4 &= S - (x_1 + x_2 + x_3) = S - \left[x_1 + \left(\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}S \right) + \left(\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}S \right) \right] \\ &= S - \left[\frac{7}{12}S + \frac{29}{12}x_1 \right] = \frac{5}{12}S - \frac{29}{12}x_1. \end{aligned}$$

Ces derniers calculs permettent d'écrire l'équation (4) sous la forme

$$\frac{5}{12}S - \frac{29}{12}x_1 + \frac{1}{5} \left[\frac{7}{12}S + \frac{29}{12}x_1 \right] = y,$$

soit, grâce à (5),

$$\frac{32}{60}S - \frac{116}{60}x_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}S,$$

d'où $S = 73x_1$. Posant $x_1 = 1$, on obtient les résultats précédents.

La dernière partie de notre extrait est, comme déjà remarqué dans l'introduction, la petite section de l'Algèbre d'al-Khwārizmī (dans la traduction latine attribuée à Gérard de Crémone) consacrée aux applications de l'algèbre au négoce (*conventiones negotiationis* = *mu'āmalāt*). Quatre grandeurs y interviennent, à savoir:

A = *appretiatum secundum positionem* (*musa'ar*)

B = *pretium secundum positionem* (*si'r*)

C = *appretiatum secundum querentem* (*muthman*)

D = *pretium secundum querentem* (*thaman*),

qui sont unies par la relation

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad \left(\text{soit : } \frac{\text{quantité unitaire}}{\text{prix unitaire}} = \frac{\text{quantité demandée}}{\text{prix correspondant}} \right).$$

Dès lors, trois de ces grandeurs étant données (*manifestus* = *zāhir*, *notus* = *ma'lūm*) dans la question (*sermo*, *verbum* = *qaul*) du demandeur (*interrogator*, *querens* = *sā'il*), le mode de résolution (*regula* = *qiyās*) consistera à faire le produit des deux opposés (*oppositus* = *mu(ta)bāyin*) connus, et sa division par la troisième connue déterminera la quantité inconnue (*ignotus* = *majhūl*).¹⁵⁶

Appendice A: Problèmes du *Liber augmenti et diminutionis*

Un astérisque indique que le problème apparaît dans notre extrait.¹⁵⁷

I. *De censibus*

1. $u - \left(\frac{1}{3}u + \frac{1}{4}u\right) = 8$
2. $\left[u - \left(\frac{1}{3}u + 4\right)\right] - \frac{1}{4}\left[u - \left(\frac{1}{3}u + 4\right)\right] = 20$
3. $[u - 4] - \frac{1}{4}[u - 4] = 12$
4. $\left\{(u - 4) - \left[\frac{1}{4}(u - 4) + 5\right]\right\} - \frac{1}{4}\left\{(u - 4) - \left[\frac{1}{4}(u - 4) + 5\right]\right\} = 10$
5. $\left[u - \left(\frac{1}{4}u + 5\right)\right] - \frac{1}{4}\left[u - \left(\frac{1}{4}u + 5\right)\right] = 10$
6. $\left[u + \frac{1}{3}u\right] + \frac{1}{4}\left[u + \frac{1}{3}u\right] = 30$
7. $\left[u + \left(\frac{1}{3}u + 4\right)\right] + \frac{1}{4}\left[u + \left(\frac{1}{3}u + 4\right)\right] = 40$
8. $\left\{(u + 4) + \left[\frac{1}{2}(u + 4) + 5\right]\right\} + \frac{1}{4}\left\{(u + 4) + \left[\frac{1}{2}(u + 4) + 5\right]\right\} = 70$

II. *De negotiatione*

- 9*. $2[2(2u - 1) - 2] - 3 = 10$
10. $2[2(2u - 2) - 4] - 6 = 0$

III. *De donationibus*

11. $u + 3u + 4 \cdot 3u = 64$
12. $u + (4u + 1) + [3(4u + 1) + 3] = 56$

¹⁵⁶Une version succincte de toute cette étude a été présentée au Cinquième symposium international sur l'histoire de la science arabe (Grenade, 1992).

¹⁵⁷Les titres généraux sont ceux qu'indique l'introduction à l'ouvrage.

$$13. u + (3u - 1) + [4(3u - 1) - 4] = 71$$

IV. *De pomis*

$$14. \left[u - \left(\frac{1}{2}u + 2 \right) \right] - \left\{ \frac{1}{2} \left[u - \left(\frac{1}{2}u + 2 \right) \right] + 2 \right\} \\ - \left(\frac{1}{2} \left[\left[u - \left(\frac{1}{2}u + 2 \right) \right] - \left\{ \frac{1}{2} \left[u - \left(\frac{1}{2}u + 2 \right) \right] + 2 \right\} \right] + 2 \right) = 1$$

$$15. \left[u - \left(\frac{1}{2}u + 4 \right) \right] - \left\{ \frac{1}{2} \left[u - \left(\frac{1}{2}u + 4 \right) \right] + 6 \right\} \\ - \left(\frac{1}{2} \left[\left[u - \left(\frac{1}{2}u + 4 \right) \right] - \left\{ \frac{1}{2} \left[u - \left(\frac{1}{2}u + 4 \right) \right] + 6 \right\} \right] + 8 \right) = 0$$

$$16. \left[u - \left(\frac{1}{2}u - 2 \right) \right] - \left\{ \frac{1}{2} \left[u - \left(\frac{1}{2}u - 2 \right) \right] - 4 \right\} \\ - \left(\frac{1}{2} \left[\left[u - \left(\frac{1}{2}u - 2 \right) \right] - \left\{ \frac{1}{2} \left[u - \left(\frac{1}{2}u - 2 \right) \right] - 4 \right\} \right] - 6 \right) = 10$$

V. *De obviatione*

$$17^*. u + 1 = v - 1$$

$$2(u - 4) = v + 4$$

$$18. u + 1 = \frac{1}{2}(v - 1)$$

$$3(u - 5) = v + 5$$

$$19. u + w + 1 = v - 1$$

$$3(u - 4) = v + w + 4$$

$$20. u + w + 1 = \frac{1}{3}(v - 1)$$

$$5(u - 5) = v + w + 5$$

VI. *De cambitione*

$$21^*. u + v = 1$$

$$20u + 30v = 27$$

VII. *De decenis et frumento et ordeo*¹⁵⁸

$$22^*. u + v = 10$$

$$8u + \frac{1}{2}v = 50$$

$$23. u + v = 10$$

$$u + 6v = 40$$

$$24^*. u + v = 100$$

$$5u + 3v = 460$$

¹⁵⁸Ces trois problèmes ont chacun un sujet différent: *de tritico et ordeo*; *de divisione decem*; *de cambio*.

VIII. *De mercatis*¹⁵⁹

$$25^*. \quad u + v = 10 \quad u' + v' = 20$$

$$u + 4v = 30 \quad u' + 4v' = 30$$

$$26. \quad \frac{1}{4} \left\{ u - \left[\left(u - \frac{1}{4}u \right) - \frac{1}{5} \left(u - \frac{1}{4}u \right) \right] \right\} + \frac{1}{5} \left[\left(u - \frac{1}{4}u \right) - \frac{1}{5} \left(u - \frac{1}{4}u \right) \right] = 7$$

IX. *De anulīs*

(Problèmes 27* et 28*).

Appendice B: Contenu du *Liber mahameleth*¹⁶⁰

A la suite du nombre des problèmes de chaque section est indiqué, accompagné d'un astérisque, le nombre des problèmes repris (partiellement ou entièrement) dans l'extrait.

I. (Théorie)

1. *De numeris* (introduction)
2. *De his que debent preponi practice arithmetice* (formules)
3. *De multiplicando* (opérations avec les entiers; multiplication des fractions)
4. *De aggregatione fractionum*
5. *De minuendo*
6. *De divisione fractionum*
7. *Aliud capitulum* (sommes de progressions arithmétiques)
8. *De inventione radicum et de multiplicatione et divisione et diminutione et aggregatione earum inter se.*

II. (Applications)

0. *De quatuor numeris proportionalibus*
1. *De emendo et vendendo*: 53 problèmes.
2. *De lucris*: 64 problèmes.
3. *De divisione secundum portiones*: 4 problèmes.
4. *De massis*: 5 problèmes.
5. *De cortinis*: 12 problèmes.
6. *De linteis*: 16 problèmes.

¹⁵⁹Le premier problème est intitulé, dans le texte lui-même, *de foris rerum venalium*. Quant au second, sa place conviendrait à la fin du chapitre I.

¹⁶⁰Le texte complet est en cours d'édition dans la collection historique *Sources and studies* de Springer-Verlag.

7. *De molare*: 20 problèmes.
8. *De coquendo musto*: 16 problèmes.
9. *De mutuando*: 5 problèmes.
10. *De conductis*: 48 problèmes.
11. *De varietate mercedis operariorum*: 10 problèmes (1*).
12. *De conducendis vectoribus*: 10 problèmes (1*).
13. *De conducendis incisoriibus lapidum (et aliis)*: 12 problèmes (5*).
14. *De impensa olei lampadarum*: 10 problèmes.
15. *De impensa animalium (et de mensuris diversis)*: 14 problèmes (1*).
16. *De expensa hominum in pane (et de mensuris diversis)*: 7 problèmes.
17. *De cambio morabitinorum*: 24 problèmes (1*).
18. *(De cisternis)*: 10 problèmes (4*).
19. *De scalis (et aliis)*: 18 problèmes (8*).
20. *(De fasciculis)*: 5 problèmes (5*).
21. *De nuntiis*: 10 problèmes (7*).
22. *(De hominibus nummos habentibus)*: 4 problèmes (4*).
23. *(De emptione equi)*: 3 problèmes (3*).

Appendice C: Extrait de l'Arithmétique de 'Alī le Calculateur

(MS Feyzullah Ef. 1365,1, fol. 71^r–72^r).

(من كتاب الموضح في علم الحساب
تأليف الشيخ الإمام العالم علي الحساب بمصر)
باب الحيات

حية يخرج كل يوم ثلثها وينصرف ربعها ثم كذلك متى خرج ثلثها انصرف ربعها في كم تخرج.

فانظر من حيث يقوم الثلث والرابع وذلك من اثني عشر فتأخذ ثلثها وربعها يكون سبعة فاحفظها ثم اسقط الثلثة > من الاثني عشر يبقى تسعة فاقسمها على فضل ما بين الثلثة < والأربعة يخرج تسعة ثم اعرف ما اسم الثلثة من السبعة المحفوظة وذلك ثلثة أسباع فاجملها على التسعة يكون عدد الأيام وذلك تسعة أيام وثلثة أسباع.

باب منه

حية طولها سبعة أذرع يخرج منها ذراع وينصرف ثلث ذراع في كم تخرج.

الباب فيه أن تجمل الثلث ذراع على الذراع يكون ذراعًا وثلثًا فاحفظه ثم اسقط الثلث ذراع من السبعة أذرع يبقى ستة أذرع وثلثان فاقسمها على فضل ما بين الثلث ذراع والذراع يخرج عشرة > ثم اعرف ما اسم الثلث ذراع من الذراع وثلث ذراع المحفوظ وذلك رُبع فاجمله على العشرة يخرج عشرة < أيام ورُبع.

باب من مجهول الحيات

حيّة طولها سبعة أذرع يخرج منها كلّ يوم ذراع وينصرف > جزء من < ذراع فخرجت الحية في عشرة أيام ورُبع كم الجزء ذراع المنصرف.
بابه أن تضرب الذراع في العشرة ورُبع تكون بحالها فاسقط منها السبعة أذرع التي هي طول الحية يبقى ثلاثة ورُبع ثم اسقط الرُبع الرائد على العشرة أيام من العشرة يبقى تسعة ونصف ورُبع فاعرف ما اسم الثلاثة ورُبع منها وذلك ثلث فهو الجزء الذي مع الذراع. وفي ذلك كفاية.

(Received: August 17, 1998)