SCIAMVS 4 (2003), 137–189

Une compilation arabe du XII^{e} siècle sur quelques propriétés des nombres naturels

Jacques Sesiano

Département de mathématiques
Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

I. Introduction

Le manuscrit Fatih 3439, actuellement à la Bibliothèque Süleymaniye à Istamboul, contient aux fol. 178^{r}–182^{v} la copie d'une compilation anonyme faisant référence à divers mathématiciens. Le premier, Max Krause attira l'attention sur cet opuscule en 1936 en l'incluant dans sa liste de manuscrits.[1] L'époque de composition du texte original peut être assez précisément déterminée: l'un des mathématiciens mentionnés est mort au début du XII^{e} siècle et le scribe indique à la fin qu'il acheva son travail de copie le 11 safar 587, soit le 10 mars 1191 (dans la ville de Mossoul, comme il apparaît des autres œuvres qu'il a reproduites dans le même recueil). Son texte, à l'encre brune, a été revu, de même que d'autres traités du recueil, par une seconde main qui a ajouté à l'encre noire la ponctuation, des annotations marginales sur le contenu, parfois les vérifications de calculs.

Dans notre compilation, les calculs vérifiés concernent la première partie. Celle-ci, qui suit une introduction historique à la gloire des nombres, traite de diverses catégories de nombres naturels et de la manière de les trouver ou d'en déterminer les sommes. On trouve ainsi successivement les définitions des nombres naturels, pairs, impairs, premiers, composés, relativement premiers, commensurables, triangulaires, carrés, oblongs, parfaits, amiables. Quant aux formules, elles concernent la sommation des nombres impairs et pairs[2], oblongs, redoublés depuis 1 sur les 64 cases du jeu d'échecs (avec une illustration de la grandeur du résultat, en le comparant avec le nombre de pièces d'argent qu'il faudrait pour recouvrir le globe terrestre), triangulaires, carrés, cubiques, ainsi que le calcul des nombres parfaits et de certaines paires de nombres amiables.

Ces définitions et formules sont presque toutes bien connues depuis l'antiquité, et les auteurs musulmans en eurent connaissance par les traductions d'Euclide et de

[1] "Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abt. B, 3, pp. 437–527.

[2] La sommation des nombres naturels est omise, mais il s'agit certainement d'un oubli de copiste (voir note 48).

Nicomaque principalement. D'époque islamique sont en revanche la détermination des nombres amiables et, dans une certaine mesure, les doublements successifs depuis l'unité.[3] Mais notre auteur n'a pas eu besoin de recourir aux traductions des textes grecs pour ses connaissances. On a même une idée de la source de sa première partie: plusieurs sections du texte se retrouvent, parfois *verbatim*, dans un mémoire d'al-Qabīṣī sur les séries arithmétiques.[4] Al-Qabīṣī a quelques sujets dignes d'intérêt en plus: la première apparition connue de la formule pour la sommation des bicarrés[5], un autre type de duplication sur les cases du jeu d'échecs (chaque case contient le double de *toutes* les précédentes), mais il oublie la sommation des nombres triangulaires. On en conclura donc que leur source est probablement la même ou que notre traité ne descend qu'indirectement de celui d'al-Qabīṣī.

La deuxième partie, elle, concerne les carrés magiques et remonte à des textes originellement en arabe.[6] L'auteur lui-même nous dit avoir lu maints écrits sur les carrés magiques, et d'avoir choisi de rapporter ce qu'il trouvait de plus clair et de plus facilement applicable. L'avantage de ceci, c'est que nous avons ainsi des informations sur des textes actuellement perdus, ou, au moins, des remarques du compilateur sur la qualité de quelques-uns des ouvrages qu'il a eu l'occasion de lire. Ainsi, il affirme que, des divers auteurs traitant de ce sujet qu'il connaît, il n'en a trouvé aucun "qui en parle d'une manière aussi générale que Abū 'Alī ibn al-Haytham"; dans leur majorité, les autres, comme al-Anṭākī, se limitent à énoncer une suite de directives disant "de placer tel nombre dans telle case sans expliquer où en résidait la raison". Nous ne connaissons pas l'écrit d'Ibn al-Haytham (env. 960 1040), mais les extraits reproduits ici suggèrent en effet qu'il a dû être d'une grande clarté. Nous connaissons par contre le texte d'al-Anṭākī et comprenons l'irritation ayant pu gagner son détracteur. Notre auteur a aussi rapporté d'Asfizārī, ou Isfarāyinī, un auteur mort au début du XII^{e} siècle, une méthode qui était "plus facile que celle d'al-Anṭākī et celle d'Ibn al-Haytham". Inspiré par ces illustres savants, notre auteur a désiré lui aussi apporter une contribution; il ignorait qu'il avait malheureusement

[3] C'est là aussi un problème antique dans son essence, mais nouveau par son aspect: l'antiquité (tant mésopotamienne que grecque) considère la somme $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{29} = 2^{30} - 1$, donc avec 30 termes, alors que dans le monde musulman on étend la somme à l'échiquier, donc avec 64 termes.

[4] A. Anbouba, "Un mémoire d'al-Qabīṣī (4e siècle H.) sur certaines sommations numériques", *Journal for the History of Arabic Science* 6 (1982), pp. 181 208; J. Sesiano, "A Treatise by al-Qabīṣī (Alchabitius) on arithmetical series", dans *From Deferent to Equant, a volume of studies (...) in honor of E. S. Kennedy*, edd. D. King and G. Saliba, 1987 [= *Annals of the New York Academy of sciences* 500], pp. 483 500.

[5] $\sum_{1}^{n} k^4 = \left[\left(n^2 + \frac{n}{2}\right)\left(n+1\right)\right] \cdot \left[\left(\frac{n}{5} + \frac{1}{5}\right) n - \frac{2}{30}\right]$.

[6] Nous avons brièvement analysé le contenu de cette seconde partie dans "Herstellungsverfahren magischer Quadrate aus islamischer Zeit (I)", *Sudhoffs Archiv* 64 (1980), pp. 187 196.

été précédé.

Avant d'examiner ces méthodes, rappelons quelques généralités sur les carrés magiques. On appelle carré magique un carré partagé en un nombre carré de cases où l'on devra disposer une suite de nombres naturels différents en telle sorte que la même somme apparaisse dans chaque ligne, chaque colonne, et dans les deux diagonales principales. Si le nombre de cases dans chaque rangée est n, et que le carré entier comprend donc n^2 cases, on dira qu'il est d'ordre n. Si l'on choisit d'inscrire les n^2 premiers nombres de 1 à n^2, la somme magique à trouver dans chaque rangée sera la $n^{\text{ième}}$ partie de la somme de tous les nombres placés, soit

$$M_n = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Quant aux méthodes de construction, il en existe de générales, mais spécifiquement pour chacun de trois types d'ordres: impairs, avec $n = 2k+1$; pairement pairs, avec $n = 4k$; pairement impairs (on dit aussi 'impairement pairs'), avec $n = 2(2k+1) = 4k+2$. Elles permettent de construire des carrés de n'importe quelle grandeur depuis celui d'ordre 3, le plus petit carré magique possible.

Les méthodes de construction les plus simples reposent sur des échanges entre lignes et colonnes du *carré naturel*, c'est-à-dire d'un carré de l'ordre considéré rempli avec la suite des nombres naturels (fig. 1 & 2). Un tel carré jouit en effet de deux propriétés suffisant à l'élaboration de méthodes de construction; ce sont les suivantes.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

Figure 1

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Figure 2

(1) *La somme des diagonales, principales ou brisées, égale la quantité magique de l'ordre considéré.*

Il apparaît en effet qu'on retrouve dans les deux diagonales principales, ainsi que dans les deux parties d'une diagonale brisée, chacune des unités de 1 à n et chacun des multiples de l'ordre de $0 \cdot n$ à $(n-1)n$; les sommes des diagonales vaudront donc

$$1+2+\ldots+n+n(0+1+\ldots+(n-1)) = \frac{n(n+1)}{2} + n \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2} = M_n.$$

(2) *Deux rangées opposées, lignes ou colonnes, diffèrent de la somme magique M_n par une même quantité.* Un corollaire de cette propriété pour un carré d'ordre *impair* est que *la somme dans chacune des deux rangées médianes, ligne et colonne, égale précisément la somme magique.*

Pour le cas des lignes, les éléments de la ligne L_i placée dans la moitié supérieure du carré seront

$$(i-1)n+1,\ (i-1)n+2,\ \ldots,\ (i-1)n+n$$

dont la somme vaut

$$\begin{aligned}(i-1)n^2 + \frac{n(n+1)}{2} &= \frac{n}{2}[2ni - 2n + n + 1]\\ &= \frac{n}{2}[n^2 + 1 - n^2 + 2ni - n]\\ &= M_n - \frac{n}{2}[n(n - 2i + 1)].\end{aligned}$$

La ligne opposée L_{n-i+1} contient

$$(n-i)n+1,\ (n-i)n+2,\ \ldots,\ (n-i)n+n$$

dont la somme, obtenue en remplaçant ci-dessus i par $n-i+1$, est

$$(n-i)n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = M_n + \frac{n}{2}[n(n-2i+1)].$$

Il en va de même pour les colonnes. La colonne C_j de la moitié gauche comprend les nombres

$$j,\ j+n,\ j+2n,\ \ldots,\ j+(n-1)n$$

de somme

$$\begin{aligned}nj + n\,\frac{(n-1)n}{2} &= \frac{n}{2}[2j + n^2 - n]\\ &= \frac{n}{2}[n^2 + 1 + 2j - n - 1]\\ &= M_n - \frac{n}{2}[n - 2j + 1]\end{aligned}$$

et l'on a semblablement pour C_{n-j+1}

$$n-j+1,\ (n-j+1)+n,\ \ldots,\ (n-j+1)+(n-1)n$$

de somme

$$n(n-j+1)+n\,\frac{(n-1)n}{2}=M_n+\frac{n}{2}\,[n-2j+1].$$

Pour i et j égaux à $\frac{n+1}{2}$, donc pour les rangées médianes du carré impair, ces différences disparaissent.

Comme déjà dit, les deux propriétés précédentes du carré naturel seront suffisantes pour expliquer les fondements des méthodes rapportées par notre compilation.

a. Construction de carrés d'ordres impairs ($n = 2k + 1$)

La disposition qui suit, la plus commune et la plus ancienne pour la construction des carrés impairs, a reçu plusieurs dénominations: plus le temps avançait, plus son âge reculait. Elle fut d'abord appelée "méthode de Bachet", C. G. Bachet de Méziriac l'ayant exposée (sans nullement s'en approprier la découverte) dans ses *Problemes plaisans et delectables qui se font par les nombres* (Lyon 1612). Elle fut aussi appelée "méthode de Cardan" pour une même raison, l'ouvrage en question étant le *Practica arithmeticæ* (chap. 42 & 66). Lorsque, peu avant 1700, fut connu le contenu du traité du Byzantin Manuel Moschopoulos (env. 1300) sur les carrés magiques, on la lui attribua. Il apparaît maintenant qu'elle doit remonter au plus tard au début du XIe siècle, puisque le mathématicien Ibn al-Haytham (env. 960-1040) en donne une justification. Elle est aisée à mémoriser, car elle inscrit les nombres naturels en succession de manière uniforme, quel que soit l'ordre (fig. 3):

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Figure 3

1°) On inscrit 1 dans l'une des quatre cases contiguës à la case centrale, disons celle de dessous. On s'en éloigne diagonalement, case après case, en inscrivant la suite des nombres; lorqu'on se heurte à un côté, on se reporte à la case suivante au côté opposé (pour la déterminer, il suffit de se représenter un carré accolé de même grandeur). 2°) Lorsqu'une suite de n nombres a ainsi été placée, on parvient à une case déjà occupée. On se déplace alors, mais en restant dans la même rangée, uniformément de deux cases dans le sens de la progression. On reprend alors le placement en diagonale.

Cette manière d'obtenir des carrés impairs est établie et justifiée par Ibn al-Haytham en partant des deux propriétés du carré naturel indiquées précédemment.[7] Nous apprenons ainsi que Ibn al-Haytham "prescrivit de dessiner deux carrés, d'inscrire dans l'un les nombres selon leur suite naturelle, et de reporter le contenu des deux lignes médianes, verticale et horizontale, dans les deux diagonales de l'autre carré". Il opéra ensuite "le déplacement du contenu des diagonales restantes vers leurs opposées sous de longues conditions qu'il prendrait du temps de mentionner et dont la réalisation présente pour le débutant des difficultés".

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figure 4

11			*20*	3
	12		8	
		13		
	18		14	
23				15

Figure 5

Même si notre source omet ces explications, il n'est guère difficile d'en reconstituer l'essentiel. Considérons par exemple le cas du carré d'ordre 5. Reportons d'abord, comme explicitement indiqué, les rangées médianes du carré naturel (fig. 4) dans les diagonales du carré à construire (fig. 5); selon le corollaire de la propriété 2, la condition de magie des deux diagonales sera remplie. Nous connaissons maintenant pour chaque rangée du carré, sauf les médianes, deux éléments, et nous pouvons donc compléter le carré case après case par la propriété 1: nous allons faire en sorte que les lignes et les colonnes contiennent les éléments de diagonales du carré naturel, qui font la somme magique. Ainsi, la ligne contenant 3 et 11 devra comprendre les éléments de la diagonale brisée correspondante du carré naturel, soit 3, 7, 11, 20, 24, et la colonne contenant 8 et 14 devra inclure 2, 8, 14, 20, 21; leur intersection

[7]L'auteur de la compilation a omis le corollaire de la seconde propriété, sur la somme des rangées médianes, mais il est clair de ce qui suit que Ibn al-Haytham avait dû le mentionner.

comprendra donc l'élément commun, soit 20. On peut de la sorte remplir toutes les cases du carré, qui aura la forme connue (fig. 6).

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Figure 6

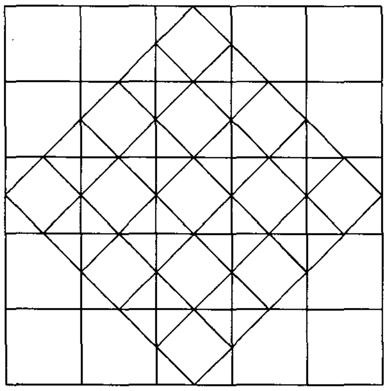


Figure 7

La construction d'Ibn al-Haytham demandait de dessiner deux carrés, l'un rempli avec la suite des naturels et l'autre, vide, étant le carré à construire. Ceci suggéra à l'auteur de notre compilation la forme plus simple suivante. Dans le carré de l'ordre choisi, on inscrit un carré oblique dont les sommets touchent les milieux des côtés. On y trace les parallèles par les points d'intersection avec les droites du carré originel. Il apparaît ainsi un carré ayant même ordre que le précédent (fig. 7). Inscrivons maintenant les nombres naturels dans le carré extérieur (fig. 8). On

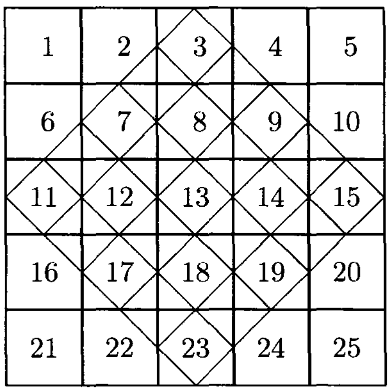


Figure 8

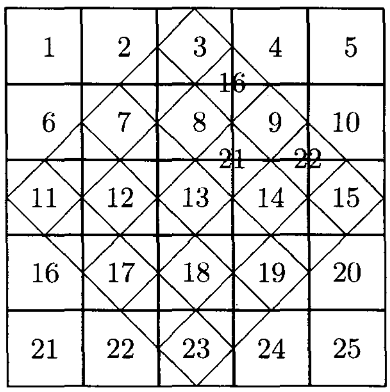


Figure 9

remarque que certaines des cases du carré oblique se trouvent ainsi remplies par des nombres du carré naturel, les autres étant vides. On remplira ces dernières en déplaçant parallèlement, et en groupes, les nombres qui se trouvent dans chacun des angles du carré naturel, jusqu'à ce qu'ils atteignent le bord opposé du carré oblique (fig. 9). Le carré oblique est alors magique, et il apparaît que sa forme est celle qui a été expliquée précédemment. Cette construction par l'intermédiaire du carré oblique a l'avantage de rendre visible que la magie du carré obtenu ne dépend que des deux propriétés du carré naturel précédemment indiquées: les deux diagonales du carré construit sont les rangées médianes du carré naturel, et le déplacement des cases angulaires vers l'intérieur du carré oblique reconstitue les diagonales brisées du carré naturel.

Il est possible que notre auteur du XII^{e} siècle soit, mais il est plus vraisemblable qu'il croie avoir été, le premier utilisateur de cette construction d'un carré oblique dans lequel on réalise la magie. Il est du moins certain que son inspiration est à trouver dans le traité d'Asfizārī qu'il dit lui-même avoir lu: par un autre auteur nous savons qu'Asfizārī avait dessiné un tel carré oblique, mais afin d'obtenir un autre type de magie.[8] Quelle qu'en ait été l'origine, la méthode d'inscription d'un carré intermédiaire oblique a eu un succès point négligeable: on la retrouve dans les traités arabes jusqu'aux temps modernes.[9]

b. Construction des carrés d'ordres pairement pairs ($n = 4k$)

Un carré magique d'ordre 4 peut être obtenu de la manière suivante. Prenons un carré vide d'ordre 4, et marquons ses diagonales de quelque manière, disons par des points (fig. 10). Enumérons ensuite les cases depuis un angle, et inscrivons dans chaque case qui contient un point le nombre atteint. Lorsque nous aurons ainsi couvert toutes les cases, nous repartirons de la dernière et parcourrons le carré en sens inverse, énumérant à nouveau les cases et remplissant cette fois celles qui sont dépourvues de points (fig. 11).

•			•
	•	•	
	•	•	
•			•

Figure 10

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Figure 11

Cette méthode peut aisément être étendue aux ordres supérieurs. Prenons un carré d'ordre $n = 4k$ vide, et séparons-le en k^2 carrés d'ordre 4, dans lesquels nous

[8]La magie dans laquelle les nombres impairs occupent un carré oblique à l'intérieur du carré, et les pairs sont tous concentrés dans les angles, dont un exemple apparaît au début de notre texte. Cette construction est obtenue de diverses manières depuis le début du XI^{e} siècle (voir J. Sesiano, *Un traité médiéval sur les carrés magiques* (Lausanne 1996), pp. 35 *seqq.*); la méthode d'Asfizārī nous est décrite par Kharaqī (J. Sesiano, "Herstellungsverfahren magischer Quadrate aus islamischer Zeit (III)", *Sudhoffs Archiv* 79 (1995), pp. 193–226).

[9]Ainsi, elle apparaît chez al-Kišnāwī, un auteur du XVIII^{e} siècle; voir J. Sesiano, "Quelques méthodes arabes de construction des carrés magiques impairs", *Bulletin de la Société vaudoise des sciences naturelles* 83 (1994), pp. 51–76.

disposerons des points comme nous venons de le faire (fig. 12). En énumérant les cases depuis un angle et en inscrivant les nombres atteints dans les cases correspondantes d'un même type, puis en énumérant les cases depuis l'angle opposé diagonalement et en inscrivant les nombres atteints dans les cases de l'autre type, on obtiendra un carré magique (fig. 13). Le carré d'ordre 12 de la figure 14 est construit de la même façon. Telle est la méthode exposée par l'auteur de notre compilation, qu'il dit être plus simple que celle d'Ibn al-Haytham. Ici encore, il se sera fait des illusions sur sa primauté, puisque ce type de construction apparaît déjà au siècle précédent[10].

•			•	•			•
	•	•			•	•	
	•	•			•	•	
•			•	•			•
•			•	•			•
	•	•			•	•	
	•	•			•	•	
•			•	•			•

Figure 12

1	*63*	*62*	4	5	*59*	*58*	8
56	10	11	*53*	*52*	14	15	*49*
48	18	19	*45*	*44*	22	23	*41*
25	*39*	*38*	28	29	*35*	*34*	32
33	*31*	*30*	36	37	*27*	*26*	40
24	42	43	*21*	*20*	46	47	*17*
16	50	51	*13*	*12*	54	55	*9*
57	*7*	*6*	60	61	*3*	*2*	64

Figure 13

Il semblerait toutefois que l'auteur de notre compilation ait cru qu'une telle méthode n'était applicable qu'aux carrés dont chaque *quadrant* est divisible par 4, car on pourra ainsi y placer des petits compartiments d'ordre 4 dont les diagonales seront pourvues de points; de fait, et notre dernière figure le montre déjà, la méthode est applicable à tout carré d'ordre $n = 4k$ et non seulement aux ordres $n = 8k$, car peu importe qu'une suite de ces compartiments soit coupée par les axes du carré.

C'est sans doute à cause de cette erreur d'appréciation qu'il rapporte une seconde méthode, valable cette fois pour tous les carrés des ordres $n = 4k$, qu'il attribue à Asfizārī. Elle étend la méthode de déplacement du contenu des cases que nous avons vue pour l'ordre $n = 4$ à des compartiments entiers: on partage le carré naturel d'ordre $n = 4k$ en 16 carrés d'ordre k, et on échange les huit carrés sur les diagonales avec leurs opposés diagonalement en retournant leur contenu — ou bien on applique ceci aux huit autres: les carrés obtenus ne différeront que par une

[10]Dans le *Traité médiéval* (mentionné dans la note 8), pp. 41–42.

rotation de 180°. Les figures 15 à 18 illustrent ces transformations pour ce second cas.

1	*143*	*142*	4	5	*139*	*138*	8	9	*135*	*134*	12
132	14	15	*129*	*128*	18	19	*125*	*124*	22	23	*121*
120	26	27	*117*	*116*	30	31	*113*	*112*	34	35	*109*
37	*107*	*106*	40	41	*103*	*102*	44	45	*99*	*98*	48
49	*95*	*94*	52	53	*91*	*90*	56	57	*87*	*86*	60
84	62	63	*81*	*80*	66	67	*77*	*76*	70	71	*73*
72	74	75	*69*	*68*	78	79	*65*	*64*	82	83	*61*
85	*59*	*58*	88	89	*55*	*54*	92	93	*51*	*50*	96
97	*47*	*46*	100	101	*43*	*42*	104	105	*39*	*38*	108
36	110	111	*33*	*32*	114	115	*29*	*28*	118	119	*25*
24	122	123	*21*	*20*	126	127	*17*	*16*	130	131	*13*
133	*11*	*10*	136	137	*7*	*6*	140	141	*3*	*2*	144

Figure 14

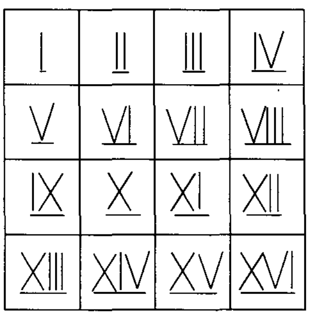


Figure 15

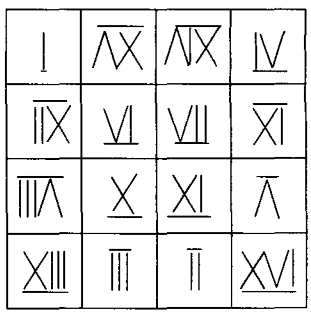


Figure 16

1	2	3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	10	11	12
13	14	15	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	22	23	24
25	26	27	*28*	*29*	*30*	*31*	*32*	*33*	34	35	36
37	*38*	*39*	40	41	42	43	44	45	*46*	*47*	*48*
49	*50*	*51*	52	53	54	55	56	57	*58*	*59*	*60*
61	*62*	*63*	64	65	66	67	68	69	*70*	*71*	*72*
73	*74*	*75*	76	77	78	79	80	81	*82*	*83*	*84*
85	*86*	*87*	88	89	90	91	92	93	*94*	*95*	*96*
97	*98*	*99*	100	101	102	103	104	105	*106*	*107*	*108*
109	110	111	*112*	*113*	*114*	*115*	*116*	*117*	118	119	120
121	122	123	*124*	*125*	*126*	*127*	*128*	*129*	130	131	132
133	134	135	*136*	*137*	*138*	*139*	*140*	*141*	142	143	144

Figure 17

1	2	3	*141*	*140*	*139*	*138*	*137*	*136*	10	11	12
13	14	15	*129*	*128*	*127*	*126*	*125*	*124*	22	23	24
25	26	27	*117*	*116*	*115*	*114*	*113*	*112*	34	35	36
108	*107*	*106*	40	41	42	43	44	45	*99*	*98*	*97*
96	*95*	*94*	52	53	54	55	56	57	*87*	*86*	*85*
84	*83*	*82*	64	65	66	67	68	69	*75*	*74*	*73*
72	*71*	*70*	76	77	78	79	80	81	*63*	*62*	*61*
60	*59*	*58*	88	89	90	91	92	93	*51*	*50*	*49*
48	*47*	*46*	100	101	102	103	104	105	*39*	*38*	*37*
109	110	111	*33*	*32*	*31*	*30*	*29*	*28*	118	119	120
121	122	123	*21*	*20*	*19*	*18*	*17*	*16*	130	131	132
133	134	135	*9*	*8*	*7*	*6*	*5*	*4*	142	143	144

Figure 18

On obtiendra exactement le même résultat en remplissant de points les cases d'un des deux groupes de huit carrés puis en énumérant, comme auparavant, les cases depuis deux angles opposés. Ceci suggère une parenté entre cette méthode et la précédente. Effectivement, elles reposent sur un même principe, qui est celui des *échanges diagonaux.* Nous avons vu (propriété 2 du carré naturel) qu'une ligne i et son opposée diffèrent de la somme magique par les quantités

$$\pm \frac{n}{2}\,[n(n-2i+1)].$$

Or, la différence de deux de leurs éléments qui sont alignés verticalement vaut uniformément $n(n-2i+1)$, cependant que la ligne supérieure est, relativement à M_n, en défaut de $\frac{n}{2}$ fois cette quantité alors que son opposée a ceci en excès; donc l'échange vertical de $\frac{n}{2}$ tels éléments entre deux lignes opposées du carré naturel amènera la somme magique dans les deux lignes concernées. De même, nous avons vu qu'une colonne j et son opposée diffèrent de la somme magique par les quantités

$$\pm \frac{n}{2}\,[n-2j+1].$$

La différence entre deux éléments alignés horizontalement étant uniformément $n-2j+1$, et le défaut d'une colonne et l'excès de sa conjuguée égalant $\frac{n}{2}$ fois cette quantité, on aura égalisé deux colonnes opposées en échangeant la moitié de leurs éléments, comme dans le cas précédent. Le principe de l'égalisation est maintenant clair: considérant chaque paire de lignes opposées, nous devrons échanger la moitié de leurs éléments, et de même pour chaque paire de colonnes opposées, tout en évitant de modifier les diagonales principales qui, selon la propriété 1, contiennent déjà la somme requise. Toutefois une difficulté pourra apparaître lors de tels échanges entre lignes et colonnes: si l'on échange arbitrairement la moitié des éléments entre deux lignes opposées, il arrivera que des éléments opposés de colonnes conjuguées ne présentent plus la différence constante, en sorte que leur échange ne produira pas l'égalisation. On évitera cet écueil de la manière suivante.

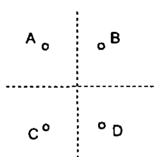


Figure 19a

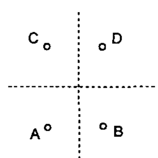


Figure 19b

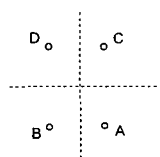


Figure 19c

Considérons quatre éléments placés symétriquement par rapport aux deux axes dans le carré naturel (fig. 19a). On commence par échanger deux éléments d'une ligne avec leurs correspondants de la ligne opposée (fig. 19b). Puis on échange les mêmes éléments avec leur correspondants de la colonne opposée (fig. 19c). Ces quatre échanges, deux verticaux et deux autres horizontaux, se réduisent de fait à une paire d'échanges diagonaux, car nous nous trouvons dans la situation finale où les quatre éléments ont été intervertis avec ceux qui à l'origine leur étaient diagonalement opposés. Grâce à ceci, nous avons pu éliminer la $\frac{n}{4}^{\text{ième}}$ partie du défaut et de l'excès, à la fois pour une paire de lignes et pour une paire de colonnes.

Ainsi, en procédant à $\frac{n}{4}$ telles paires d'échanges diagonaux pour chaque paire de lignes opposées, donc en déplaçant $\frac{n}{2}$ nombres par ligne et $\frac{n^2}{2}$ nombres pour tout le carré naturel, on aura égalisé complètement et simultanément les lignes et les colonnes, et le carré obtenu sera magique. C'est ce qu'opérait notre inscription de $\frac{n^2}{2}$ points: elle marquera par exemple les places à laisser inchangées, alors que l'énumération depuis l'angle opposé permettra de remplir les cases vides et opérera ainsi les échanges diagonaux nécessaires.

Une méthode facile d'obtenir la répartition appropriée des points est la suivante. Partageons le carré vide en ses quadrants. Comme ceux-ci ont un nombre pair $2k$ de cases dans chaque rangée, inscrivons dans chaque ligne d'un des quadrants un nombre de points en telle sorte qu'ils occupent exactement la moitié des lignes et la moitié des colonnes. Il y aura ainsi k points par ligne et par colonne du quadrant. Ensuite, rabattons ce premier quadrant sur les autres successivement, et reportons des points dans les cases recouvertes par des cases ayant des points. Le résultat est une figure où la disposition des $\frac{n^2}{2}$ points présente une symétrie centrale: si une case en contient un, il en ira de même pour celle qui lui est diagonalement opposée; inversement, à une case vide fera face diagonalement une case vide. Ainsi, deux cases opposées diagonalement étant remplies lors de la même énumération, un nombre n'est attribué qu'une seule fois: il ne pourra y avoir de répétition de nombres inscrits lors des deux énumérations. La parenté des deux méthodes rapportées par l'auteur de notre compilation apparaît ainsi clairement: elles correspondent aux configurations des figures 12 et 20, et tant l'une que l'autre reposent essentiellement sur la propriété 2 du carré naturel.

•	•					•	•
•	•					•	•
		•	•	•	•		
		•	•	•	•		
		•	•	•	•		
		•	•	•	•		
•	•					•	•
•	•					•	•

Figure 20

c. Construction des carrés d'ordres pairement impairs ($n = 2(2k+1) = 4k+2$)

Effectuer l'égalisation par des échanges diagonaux uniquement est certes aisé, mais point nécessaire. On peut se contenter d'échanges horizontaux et verticaux séparés, voire y inclure des échanges diagonaux, pour autant que soit maintenu le principe fondamental de $\frac{n}{2}$ échanges d'éléments par paires de lignes et de colonnes placées symétriquement dans le carré naturel. Pour un ordre pairement impair, il n'est plus possible d'utiliser des échanges diagonaux uniquement: le quadrant étant de l'ordre impair $2k+1$, on ne peut remplir la moitié de ses rangées avec des points. Il nous faudra donc aussi utiliser des échanges horizontaux et verticaux, en évitant toutefois de les appliquer aux éléments des diagonales pour ne pas modifier leur somme magique. On symbolisera ces échanges par quatre types de signes: les • conservent la place des nombres du carré naturel, les | signifient un échange vertical entre lignes opposées, les — correspondent à un échange horizontal et les × traduisent un échange diagonal, comme les vides précédemment (les signes — ne modifient pas la composition d'une ligne, les signes | ne changent pas non plus la somme d'une colonne). Les | et les × servent donc à égaliser les lignes, alors que les — et × jouent le même rôle pour les colonnes, les × jouant les deux rôles puisqu'un échange diagonal réalise simultanément un échange horizontal et un échange vertical. Pour que les lignes soient égalisées, chaque ligne devra donc contenir au total $\frac{n}{2}$ signes des formes × et |, et, pour que les colonnes soient égalisées, chaque colonne devra contenir $\frac{n}{2}$ signes des formes × et —.

Notre compilation anonyme nous rapporte une méthode de déplacement dans le carré naturel qui doit permettre une égalisation des lignes et des colonnes pour un ordre pairement impair. Seulement, et notre auteur ne s'en est pas rendu compte, cette méthode ne vaut que pour une valeur paire de k, donc pour un ordre de la forme $8t+2$. Cela peut paraître surprenant puisqu'il affirme par ailleurs avoir choisi parmi les divers traités dont il a eu connaissance les méthodes les plus générales pour chaque type d'ordre. Il aura sans doute repris cette construction telle quelle de quelque auteur, peut-être d'Asfizārī comme la précédente. Historiquement, elle est d'un grand intérêt puisqu'elle montre l'une des tentatives antérieures à la découverte de la méthode générale de placement pour l'ordre $n = 4k+2$, découverte qui semble devoir être placée vers la fin du XI^e^ siècle et que rapporte Kharaqī (note 8).

Cette méthode ancienne reproduite dans notre compilation est la suivante. On sépare dans le carré naturel de l'ordre considéré, soit $8t+2$, les deux paires de rangées horizontales et verticales, puis on partage chacun des quatre quadrants en quatre carrés (fig. 21). On procède alors aux déplacements suivants dans le carré naturel de la figure 22 (cas le plus simple, $t=1$):

I	IX			X	V
XVI	II			VI	XI
XV	VII			III	XII
VIII	XIV			XIII	IV

Figure 21

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figure 22

1°) On échange diagonalement huit des carrés désignés par des chiffres romains, par exemple ceux qui sont sur les diagonales; on intervertira donc I et IV, II et III, V et VIII, VI et VII, en les retournant de 180° comme cela avait été fait dans la méthode de l'échange des quadrants.

2°) On échange diagonalement le contenu des quatre cases médianes.

3°) On échange $4t - 1$ paires d'éléments entre les rangées voisines des branches de la croix.

4°) On échange la diagonale descendante (↘) de IX avec la diagonale montante (↗) de X et la diagonale montante de IX avec la diagonale descendante de XIV, puis la diagonale descendante de XVI avec la diagonale montante de XV et la diagonale montante de XVI avec la diagonale descendante de XI (une case plus proche du bord reçoit un élément plus proche du bord). Le résultat est le carré de la figure 23 (les nombres déplacés sont en gras). La figure 24 symbolise ces mouvements et la manière d'énumérer les cases depuis les quatre angles pour obtenir directement le carré résultant. On y vérifiera que le nombre d'échanges requis apparaît dans chaque ligne et dans chaque colonne: il y a bien cinq des signes $\times$ et $|$ par ligne et cinq des signes $\times$ et — par colonne. On remarquera aussi que si l'ordre n'est pas de la forme $8t + 2$, et est donc de la forme $8t + 6$, on ne pourra effectuer les échanges de diagonales des petits carrés, puisque leur élément central serait déplacé deux fois. Les diagonales des carrés, et donc aussi leurs rangées, devront ainsi comprendre un nombre de cases qui soit pair.

100	**99**	**8**	**94**	5	6	**7**	**3**	**92**	**91**
90	**89**	**83**	**17**	**16**	**15**	**14**	18	**82**	**81**
71	**29**	**78**	**77**	**26**	**25**	**74**	**73**	**22**	30
40	**62**	**68**	**67**	**36**	**35**	**64**	**63**	39	**31**
41	**52**	**53**	**54**	**56**	**55**	47	48	49	50
51	**42**	**43**	**44**	**46**	**45**	57	58	59	60
61	**32**	**38**	**37**	65	66	**34**	**33**	69	70
21	72	**28**	**27**	75	76	**24**	**23**	79	80
20	**19**	**13**	84	85	86	87	88	**12**	**11**
10	**9**	93	**4**	95	96	97	98	**2**	**1**

Figure 23

• —

×	×	—	∣	•	•	•	—	×	×
×	×	∣	—	—	—	—	•	×	×
∣	—	×	×	—	—	×	×	—	•
—	∣	×	×	—	—	×	×	•	—
•	∣	∣	∣	×	×	•	•	•	•
•	∣	∣	∣	×	×	•	•	•	•
•	∣	×	×	•	•	×	×	•	•
∣	•	×	×	•	•	×	×	•	•
×	×	∣	•	•	•	•	•	×	×
×	×	•	∣	•	•	•	•	×	×

∣ ×

Figure 24

II. Traduction du texte[11]

(178^r) Au nom de Dieu, clément et miséricordieux, maître le plus puissant en sa perfection.

Louange à Dieu pour ses bienfaits, que Sa bénédiction descende sur le meilleur de ses innocents.

(I. Sur les nombres et leurs propriétés.)

Dieu très-haut n'a conféré à aucune chose de la création une propriété montrant mieux Sa toute-puissance et mettant mieux en évidence Sa majesté qu'en dotant les nombres de propriétés admirables et de significations subtiles. Les anciens Grecs, comme Pythagore et d'autres, éprouvèrent un enthousiasme intarissable pour les propriétés merveilleuses qui s'en révélaient à leurs yeux, et ils exagérèrent la vénération des nombres au point d'en faire des modèles par lesquels ils symbolisaient ce qu'ils percevaient du domaine céleste, la cause en étant aussi bien l'intensité de leur propre admiration que l'analogie que présentaient ces modèles propres au domaine céleste lorsqu'on les rapprochait du domaine temporel.[12] Les Grecs découvrirent des espèces de nombres à propos desquels ils mentionnèrent des propriétés merveilleuses. Ainsi, Platon affirme, dans son 'Des propriétés des nombres amiables et relativement premiers'[13], que l'inscription (d'une paire) de nombres amiables dans les mets et boissons que consomment deux personnes fera naître l'amour entre elles, le contraire advenant si les nombres sont premiers entre eux. Thābit ibn Qurra s'occupa de la recherche des nombres amiables et les étudia à l'aide de démonstrations géométriques.[14] Euclide, lui, s'occupa dans son ouvrage intitulé 'Eléments' de la recherche des nombres parfaits, et on soupçonne même que le but qu'il s'était fixé n'était autre que la découverte de ces nombres.[15] De même,

[11] Les passages entre parenthèses dans la traduction qui suit sont nos additions.

[12] Les Pythagoriciens, considérant que les principes des mathématiques étaient les principes de tout ce qui existe et voyant que les principes premiers des mathématiques elles-même étaient les nombres, firent de ces derniers les principes premiers de l'univers; ils virent dans tout ce qui est des ressemblances avec les nombres, et appliquèrent aux phénomènes célestes l'analogie des nombres — en forçant au besoin la réalité observée. C'est Aristote déjà qui s'exprime ainsi (*Métaph.* A.5, 985*b*25 *seqq.*).

[13] Un tel écrit est attribué à Platon par les sources arabes. Voir F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums V*, p. 178.

[14] Son théorème sur la formation de paires sera mentionné ultérieurement (ci-dessous, II*u*). L'écrit de Thābit a été traduit et étudié par F. Woepcke, "Notice sur une théorie ajoutée par Thâbit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs", *Journal asiatique*, 4^e série, 20 (1852), pp. 420-429. Le texte arabe a été publié par A. Saidan, *Kitāb al-a'dād al-mutaḥābba li-Thābit bin Qurra*, Amman 1977.

[15] C'est avec la formule de formation des nombres parfaits pairs (et de fait, comme on le croit

on rapporte que Thalès, l'instigateur du code des lois en Grèce, découvrit le carré magique, qui est l'une des propriétés du nombre les plus merveilleuses qui puisse apparaître.[16]

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

18	22	1	10	14
24	3	7	11	20
5	9	13	17	21
6	15	19	23	2
12	16	25	4	8

L'objet en est le suivant. On dessine un carré dont on partage chaque côté selon le nombre désiré de parties, en même quantité et de même grandeur, et l'on trace des droites depuis l'emplacement de chaque division vers la division correspondante du côté opposé. Le carré se trouve ainsi divisé en (petits) carrés dont le nombre égale la multiplication par lui-même (du nombre) des divisions sur le côté du carré. Par exemple, nous avons partagé chacun des côtés du carré ci-dessus en trois parties égales, et nous avons tiré des parallèles de chaque (point de) section vers son homologue. Elles partagent alors le carré en neuf (petits) carrés, où l'on a inscrit les nombres de 1 à 9 en telle façon que, faisant la somme (dans les rangées) verticalement, horizontalement et diagonalement, on trouve 15.[17] De même si on partage chaque côté en quatre parties et que l'on procède similairement, sauf que le partage sera en seize carrés, puis que l'on y inscrive les nombres de 1 à 16 en telle façon que, faisant la somme (dans les rangées) verticalement, horizontalement et diagonalement, on trouve 34.[18] De même si on partage chaque côté du carré en cinq parties et que l'on procède similairement, sauf que le partage sera en vingt-cinq carrés, puis qu'on y inscrive les nombres de 1 à 25 en telle façon que, faisant la somme (dans

actuellement, de tous les nombres parfaits existants) que se terminent les livres VII IX des *Eléments*, qui traitent de propriétés d'entiers.

[16]L'activité politique de Thalès en Ionie semble ici se confondre avec celle d'un autre des 'Sept Sages' de la Grèce antique, Solon, à l'origine de la constitution d'Athènes. L'usage à cette époque d'un carré magique est, lui, parfaitement fictif.

[17]Négligeant les rotations et les inversions, il n'y a qu'une seule forme du carré magique d'ordre 3 rempli avec les neuf premiers nombres.

[18]Comme l'a montré Frénicle de Bessy à la fin du XVII[e] siècle, il y a 880 possibilités de former un carré d'ordre 4 avec les seize premiers nombres. La forme ici présentée, la plus courante, est celle que nous avons discutée antérieurement (fig. 11, orientée de gauche à droite).

les rangées) verticalement, horizontalement et diagonalement, on trouve 65, selon ce modèle.[19] Ces (carrés de) nombres ont des caractéristiques que nous mentionnerons ultérieurement. On rapporte donc à propos de Thalès ceci. Il prit un panneau dont chaque côté était divisé par cent en sorte qu'il y apparaissait dix mille carrés.[20] Il y inscrivit alors les nombres de 1 à 10 000 en telle façon que, faisant la somme verticalement, horizontalement et diagonalement, on trouvait une quantité constante. Il plaça, dit-on, ce panneau dans un certain temple, et les gens de la région l'utilisaient pour prêter serment à leurs gouvernements et pour la guérison de leurs maux.[21]

(II. Des espèces de nombres et de leur sommation.)

(II.a Définitions.)

(*a*) Le nombre est une multitude composée d'unités.[22]
(*b*) Le nombre pair est celui qui se partage en deux moitiés entières, sans fraction.[23]
(*c*) Le nombre impair est celui qui dépasse le pair d'une unité.[24]
(*d*) Le nombre premier est celui que ne divise aucun nombre hormis 1.[25] Tels sont 3, 5, 7, 11, car on ne trouve pour aucun d'eux de diviseur exact hormis 1.
(*e*) Le nombre composé est celui qui est divisé par un nombre autre que 1.[26] Tel est 6, car 2 le divise trois fois et 3 le divise deux fois; tel est 8, car 4 le divise deux fois et 2 le divise quatre fois; tel est 12, car 4 le divise trois fois, 3 quatre fois, 6 deux fois, et 2 six fois.
(*f*) Deux nombres premiers entre eux sont tels qu'aucun nombre autre que 1 ne les divise tous deux exactement.[27] Tels sont 5 et 9, car on ne trouve aucun nombre les divisant tous deux exactement sinon 1.
(*g*) Deux nombres commensurables sont tels que quelque autre nombre les divise exactement.[28] Tels sont 15 et 12, qui sont commensurables par 3 car 3 les divise exactement; tels sont 10 et 6, qui sont commensurables par 2 car 2 les divise exactement.

---

[19] Nous avons précédemment fait allusion à ce type de carré séparant les nombres par parité (note 8).

[20] C'est Solon qui fit inscrire ses lois sur des panneaux.

[21] D'autres sources spécifient qu'il s'agissait du temple de Mercure (voir le manuscrit d'Istamboul Reşid 1068, fol. 49v; ou la *Duplication de l'autel* composée par Luṭfī al-Tūqātī, le bibliothécaire de Mehmet II, et éditée par Ş. Yaltkaya, A. Adnan et H. Corbin, Paris 1940, p. 52).

[22] *Eléments*, VII, déf. 2.

[23] Voir *Eléments*, VII, déf. 6.

[24] Voir *Eléments*, VII, déf. 7 (addition).

[25] *Eléments*, VII, déf. 11.

[26] Voir *Eléments*, VII, déf. 13.

[27] *Eléments*, VII, déf. 12.

[28] *Eléments*, VII, déf. 14.

(h) Il y a le nombre triangulaire, qui se compose de 1, 2, 3, et ainsi de suite à volonté; le résultat en est le nombre triangulaire, le côté en étant le nombre majeur.[29] Tel est 3, qui est le premier des nombres triangulaires; il se compose de 1 et 2, et son côté est 2. Tel est 6, qui se compose de 1, 2 et 3. Tel est 10, qui se compose de 1, 2, 3 et 4. Tel est 15, **(178$^{\mathrm{v}}$)** qui se compose de 1, 2, 3, 4 et 5.

(i) Il y a le nombre carré, qui résulte de la multiplication d'un nombre par lui-même, le nombre multiplié par lui-même étant la racine du résultat, ou, comme on dit (aussi), son côté.[30] Tel est 4, résultat de la multiplication de 2 par 2; c'est le premier des nombres carrés, et son côté est 2.

(j) Il y a les nombres oblongs, qui proviennent des multiplications de 1 par 2, de 2 par 3, de 3 par 4, et ainsi de suite.[31]

(k) Il y a le nombre parfait, défini comme égalant la somme de ses parties, c'est-à-dire des nombres qui le divisent, en incluant l'unité.[32] Tel est 6, qui est le premier des nombres parfaits; en effet, 1 le divise six fois, 2 le divise trois fois, 3 le divise deux fois et en est donc la moitié, et si on additionne 1, 2 et 3, on obtient 6, égal au 6 donné. Tel est 28; en effet, 14 le divise deux fois et en est donc la moitié; 7 le divise quatre fois et en est donc le quart; 4 le divise sept fois et en est donc le septième; 2 le divise quatorze fois et en est donc le demi-septième; 1 le divise vingt-huit fois, et en est donc le quart du septième; faisant la somme de 14, 7, 4, 2, 1, on obtient 28, égal au nombre considéré.

(l) Il y a les nombres amiables, deux nombres étant tels lorsque la somme des quantités qui divisent chacun d'eux égale l'autre.[33]

II.b Sommations.

(m) On désire faire la somme des nombres impairs. Prendre le nombre pair suivant le dernier impair, puis sa moitié et la multiplier par elle-même. Ce sera le résultat que l'on recherche.[34]

Exemple. Sommation de la suite des impairs pris consécutivement de 1 à 9. On prend le nombre pair suivant 9, soit 10; on prend sa moitié, 5, et on la multiplie par elle-même. Le résultat, 25, est la somme des nombres impairs de 1 à 9. C'est un nombre carré, possédant (donc) une racine (exacte).

---

[29]Les nombres triangulaires sont donc les sommes des nombres naturels successifs en partant de l'unité. Le $n^{\text{ième}}$ triangulaire aura ainsi la forme $T_n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$.

[30]Voir *Eléments*, VII, déf. 18.

[31]Nombres de la forme $n\,(n+1)$. Le texte arabe a ici et lors de la sommation (ci-dessous, o) *mudaḥrga* (= ronds, arrondis), que nous avons corrigé les deux fois.

[32]*Eléments*, VII, déf. 22.

[33]N_1 et N_2 seront amiables si $s(N_1) = N_2$ et $s(N_2) = N_1$, avec $s(N)$ somme des diviseurs de N sans lui-même.

[34]$\sum_{1}^{n} (2k-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-3)+(2n-1) = n^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot 2n\right)^2$.

(n) On désire faire la somme des nombres pairs, pris consécutivement depuis 2 jusqu'à un pair choisi. Multiplier la moitié du dernier pair par cette moitié plus 1. Ce sera le résultat cherché.[35]

Exemple. Sommation (des pairs) de 2 jusqu'à 12. On prend la moitié de celui-ci, soit 6; on la multiplie par cette moitié plus 1, soit 7. Le résultat, 42, est la somme des nombres pairs de 2 à 12.

(o) On désire faire la somme des nombres oblongs. Prendre le (second terme du) dernier nombre que l'on veut additionner. Prendre le nombre qui le dépasse de 1 et celui qui en est moindre de 1. On a ainsi trois nombres (consécutifs) dont l'un est toujours intégralement divisible par 3. Multiplier ensuite entre eux les deux nombres pas divisibles par 3, puis le produit par le tiers du nombre divisible par 3. Le résultat sera la somme des nombres considérés.[36]

Exemple. Ajouter (les nombres) issus des multiplications de 1 par 2, 2 par 3, 3 par 4, 4 par 5 et ainsi de suite jusqu'à 9 par 10. On prend (le nombre) supérieur à 10 de 1, donc 11, et (le nombre) inférieur à 10 de 1, donc 9; puis on multiplie 10 par 11, ce qui fait 110, que l'on multiplie par le tiers de 9, soit 3, ce qui donne 330. C'est la somme des nombres considérés.

(p) On désire faire la somme des nombres (obtenus) par doublement (successif), (problème) connu (sous le nom) de 'doublement des cases du jeu d'échecs'. Multipliant le contenu de la deuxième case par lui-même, on obtient le contenu de la case (d'indice) double de (celui de) la deuxième moins 1, c'est-à-dire de la troisième case; si on en soustrait 1, le reste sera la somme du contenu des première et deuxième cases. Si on n'en soustrait pas 1 et qu'on le multiplie par lui-même, on obtiendra le contenu de la case (d'indice) moindre de 1 que le double de (celui de) la troisième, donc le contenu de la cinquième case; si on en soustrait 1, le reste sera la somme du contenu des première, deuxième, troisième et quatrième cases.

Exemple. On désire opérer le doublement des cases du jeu d'échecs. On multiplie le contenu de la deuxième case, soit 2, par lui-même; on obtient 4, qui est le contenu de la troisième case; si on en soustrait 1, le reste sera le contenu des première et deuxième cases. Ensuite, si on multiplie le contenu de la troisième case, soit 4, par lui-même, on obtiendra le contenu de la cinquième case, (d'indice) moindre de 1 que le double de (l'indice de) la troisième; si on en soustrait 1, le reste sera la somme du contenu des première, deuxième, troisième et quatrième cases.

Si ensuite on multiplie le contenu de la cinquième case par lui-même, on obtiendra le contenu de la neuvième case, (d'indice) moindre de 1 que le double de (l'indice de) la cinquième; si on en soustrait 1, le reste sera le contenu total des huit (premières)

---

[35] $\sum_{1}^{n} 2k = 2 + 4 + 6 + \ldots + (2n-2) + 2n = n\,(n+1).$

[36] $\sum_{1}^{n} k\,(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1)\,n + n\,(n+1) = \frac{1}{3}\,n\,(n+1)\,(n+2).$

cases. Si ensuite on multiplie le contenu de la neuvième case par lui-même, on obtiendra le contenu de la dix-septième case, (d'indice) moindre de 1 que le double de (l'indice de) la neuvième; si on en soustrait 1, le reste sera le contenu total des seize (premières) cases. Si ensuite on multiplie le contenu de la dix-septième case par lui-même, le résultat sera le contenu de la trente-troisième case, (d'indice) moindre de 1 que le double de 17; si on en soustrait 1, le reste sera le contenu total des trente-deux (premières) cases. Si ensuite on multiplie le contenu de la trente-troisième case par lui-même, on obtiendra le contenu de la soixante-cinquième case, (d'indice) moindre de 1 que le double de 33; si on en soustrait 1, le reste sera le contenu total des cases du jeu d'échecs. Si on le laisse tel quel, ce sera le double du contenu de la soixante-quatrième case; si donc on en prend la moitié, ce sera le contenu de la soixante-quatrième case. La règle en est de multiplier 4 par 4, puis le résultat par lui-même, puis le résultat par lui-même, puis le résultat par lui-même, **(179^r)** puis le résultat par lui-même; ceci égalera la somme des doublements du jeu d'échecs augmentée de 1. C'est ce qu'on dit provenir de 4 par 4 quatre fois élevé au carré.[37]

Exemple. Nous multiplions 4 par 4, ce qui donne 16; c'est le contenu de la cinquième case. Nous le multiplions par lui-même, ce qui donne 256; c'est le contenu de la neuvième case. Ensuite, nous multiplions ceci par lui-même, ce qui donne 65 536; c'est le contenu de la dix-septième case. Ensuite, nous le multiplions par lui-même, ce qui donne 4 294 967 296; c'est le contenu de la trente-troisième case. Ensuite, nous multiplions ceci par lui-même, ce qui donne 18 446 744 073 709 551 616; c'est le double de ce qui apparaît dans la dernière case du jeu d'échecs. Si on en soustrait 1, le reste sera la somme apparaissant sur l'ensemble des cases du jeu d'échecs. Si, avant la soustraction de 1, on en prend la moitié, on aura ce qui apparaît dans la soixante-quatrième case. La somme de ce qui apparaît dans les soixante-quatre cases, donc la somme du redoublement de l'échiquier, est: dix-huit quadrillions quatre cent quarante-six trillions sept cent quarante-quatre billions septante-trois milliards sept cent neuf millions cinq cent cinquante et un mille six cent quinze.[38]

---

[37] $\left(\left[\left((4\cdot 4)^2\right)^2\right]^2\right)^2$.

[38] Soit à calculer la somme $q_1 + q_2 + \ldots + q_{64}$, avec $q_k = 2^{k-1}$ qui est le contenu de la $k^{\text{ième}}$ case du jeu d'échecs, avec donc $q_1 = 1$. Les deux règles utilisées sont:

- le carré du contenu de la $k^{\text{ième}}$ case est égal au contenu de la $(2k-1)^{\text{ième}}$ case; en effet, $q_k^2 = \left(2^{k-1}\right)^2 = 2^{(2k-1)-1} = q_{2k-1}$
- le contenu de la $k^{\text{ième}}$ case, moins 1, égale la somme du contenu des premières $k-1$ cases; en effet, $q_k - 1 = 2^{k-1} - 1 = 1 + 2 + \ldots + 2^{k-2} = q_1 + q_2 + \ldots + q_{k-1}$.

Ainsi, calculant successivement 2^2 $(= q_3)$, 2^4 $(= q_5)$, 2^8 $(= q_9)$, 2^{16} $(= q_{17})$, 2^{32} $(= q_{33})$, 2^{64} $(= q_{65})$, on connaîtra le contenu de la $64^{\text{ième}}$ case $(q_{65} = 2\cdot q_{64})$ ainsi que la somme sur tout l'échiquier (puisque $q_1 + q_2 + \ldots + q_{64} = q_{65} - 1$). Remarquons que les deux règles ci-dessus étaient

Il était acquis chez les Anciens que la surface de la Terre était sphérique, qu'elle se trouvait au centre de la sphère céleste et que sa surface était homéomorphe à la surface de la sphère céleste.[39] Ils désirèrent connaître la mesure de la Terre en coudées.[40] Aussi choisirent-ils un point fixe de la sphère céleste, comme par exemple le pôle, puis ils observèrent quelle était sa hauteur au-dessus du plan de l'horizon correspondant à leur lieu d'observation. Ils trouvèrent pour sa hauteur une certaine grandeur et signalèrent par une marque leur emplacement. Ensuite, ils se déplacèrent le long d'un des grands cercles décrits sur la surface de la Terre, ou plus précisément celui que trace le méridien passant par les deux pôles. Il est clair que lorsqu'ils se déplaçaient en direction du pôle ils devaient descendre le long de la courbure de la Terre et le pôle devait donc s'élever continuellement relativement à eux, et que lorsqu'ils tournaient en cercle autour du pôle celui-ci devait perpétuellement conserver son altitude par rapport à eux. Aussi se déplacèrent-ils invariablement en direction du pôle tout en observant sa hauteur avec les instruments dont ils se servaient pour (mesurer) les hauteurs jusqu'à ce qu'ils trouvassent que la hauteur du pôle avait varié de la grandeur d'un degré. Quand ce fut le cas, ils mesurèrent la distance terrestre entre le lieu où ils avaient commencé leur observation et le lieu où ils étaient parvenus. Ils trouvèrent alors 56 milles et $\frac{2}{3}$ de mille, avec un mille à 3000 coudées et la coudée noire instituée par al-Ma'mūn. Il leur apparut ainsi que la grandeur d'un degré de la circonférence d'un grand cercle de la Terre était la grandeur susmentionnée, donc 56 milles et $\frac{2}{3}$ de mille. Multipliant ceci par 360, ils obtinrent 20 400, qui est la circonférence d'un grand cercle sur la Terre. Or Archimède a montré dans la 'Mesure du cercle' que la circonférence égale trois fois le diamètre plus, approximativement, son septième; la division de ce (résultat) par 3 plus $\frac{1}{7}$ donnant 6491 milles,[41] ce sera le diamètre terrestre, c'est-à-dire la (longueur de la) droite joignant l'Est à l'Ouest en passant par le centre de la Terre.

---

déjà connues d'Abū Kāmil (vers 890), voire d'al-Khwārizmī (vers 820) auquel Abū Kāmil renvoie à ce propos à la fin de son *Algèbre* (fol. 109^{v} 110^{v}, pp. 218 220 de la reproduction éditée en 1986, avec une introduction de J. Hogendijk, par l'Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften de Francfort).

Remarque. La règle de la fin, qui signifie que l'on obtient le résultat par quatre élévations au carré successives du produit de 4 par 4, semble être une interpolation.

[39]Voir l'*Almagest* de Ptolémée I, 5 6.

[40]Ce qui suit se rapporte à la mesure de la Terre organisée par le calife al-Ma'mūn (813 833) pour vérifier les mesures grecques. Divers témoignages nous sont parvenus à son sujet; voir par exemple C. A. Nallino, "Il valore metrico del grado di meridiano secondo i geografi arabi", *Cosmos* 1892-1893 (réimprimé dans sa *Raccolta di scritti editi e inediti V*, Rome 1944, pp. 408-457).

[41]Exactement: $6490+\frac{10}{11}$. Dans le *De mensura circuli* Archimède démontre que la valeur du rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre est comprise entre $3+\frac{10}{71}$ et $3+\frac{10}{70}$; la borne supérieure $3+\frac{1}{7}$ est devenue l'approximation médiévale couramment utilisée.

Or Archimède a également montré que la multiplication du diamètre de la sphère par la circonférence d'un de ses grands cercles est égale à la mesure de sa surface entière;[42] nous avons donc multiplié le diamètre par la circonférence d'un grand cercle, obtenant ainsi 132 416 400 milles (carrés). Comme le mille carré est de 4000 coudées multipliées par elles-mêmes, et vaudra (donc) 16 000 000 coudées (carrées), nous avons multiplié 16 000 000 coudées par les milles de la mesure de la surface terrestre, ce qui fait 2 118 662 400 000 000 coudées (carrées). Ainsi, la mesure de la surface terrestre entière, (incluant) terres et mers, plaines et montagnes, (zones) habitées et désertiques, sera de 2 118 662 400 000 000 coudées (carrées). Ayant pris la grandeur du diamètre d'un dirham d'argent, nous avons mesuré avec elle la longueur de la coudée susmentionnée. Nous avons trouvé qu'elle était (un peu) supérieure à 22, en sorte que la surface d'une coudée carrée correspondra approximativement à 500 dirhams. Nous avons donc multiplié 500 par les coudées représentant la mesure de la surface terrestre; le résultat est un nombre tel que si on recouvrait de dirhams la surface[43] de la Terre, il y en aurait 1 059 331 200 000 000 000, dont la somme (exprimée en mots) est: un quadrillion cinquante-neuf trillions trois cent trente et un billions deux cent milliards de dirhams. Si nous comparons cette quantité au (résultat du) doublement sur l'échiquier du jeu d'échecs, nous trouverons que le nombre (issu) du redoublement sur l'échiquier égale 17 fois celle-ci plus, approximativement, son cinquième.[44]

(q) On désire faire la sommation des nombres triangulaires consécutifs, de 1 jusqu'où on veut. Le côté de chacun de ces nombres étant le dernier (nombre) que l'on atteint, nous connaissons le côté du dernier des nombres triangulaires que nous voulons additionner. Nous le multiplions par le tiers du nombre triangulaire suivant le dernier des nombres triangulaires que nous voulons additionner. Le résultat sera leur somme.[45]

Exemple de ceci. Nous désirons additionner les nombres triangulaires de 1 à 28. Nous prenons le côté de 28, soit 7, et le multiplions par le tiers du triangulaire suivant 28, soit 36, dont le tiers est 12. Cela fait 84, qui est le résultat de la sommation de tous les triangulaires représentés ci-après:

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 21 \quad 28.$$

Nous désirons savoir si un nombre que nous considérons est triangulaire ou non et, s'il l'est, quel est son côté. Nous doublons ledit nombre et y ajoutons $\frac{1}{4}$. Si le résultat de ceci a **(179^v)** une racine entière augmentée de $\frac{1}{2}$, le nombre sera triangulaire.

---

[42]Cela se déduit du corollaire à la proposition I, 34 du *De sphæra et cylindro*.

[43]Le copiste a remplacé *idhā basaṭa basīṭ* par *idhā basaṭa marratayn* (!).

[44]Il faudrait avoir $17 + \frac{2}{5}$; mais al-Qabīṣī a la même approximation.

[45]$1 + 2 + \ldots + n = T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\displaystyle\sum_1^n T_k = \frac{1}{3}\,n \cdot T_{n+1} = \frac{1}{3}\,n \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Enlevant de cette racine la (fraction) $\frac{1}{2}$ ajoutée au nombre entier laissera le côté du nombre triangulaire considéré.[46]

Exemple de ceci: le nombre 28. En le doublant, nous obtenons 56. Nous y ajoutons $\frac{1}{4}$ et en prenons la racine; il vient 7 plus $\frac{1}{2}$. Nous savons ainsi que 28 est un nombre triangulaire. Si on enlève la (fraction) $\frac{1}{2}$ ajoutée à 7, il reste 7, qui est le côté de 28.

(r) Somme des nombres carrés, donc des nombres à racines. Si nous voulons ceci, nous prenons la racine du dernier des nombres, donc du dernier à ajouter, et la multiplions par le nombre qui la dépasse de 1. Ensuite, nous multiplions le résultat par le double de cette racine augmenté de 1. Ensuite, nous prenons le sixième du résultat. Il en proviendra la somme désirée des nombres carrés.[47]

Exemple de ceci. Nous voulons additionner les nombres à racines de 1 à 25. Nous prenons la racine de 25, soit 5, et la multiplions par le nombre qui la dépasse de 1, soit 6; il vient 30. Nous le multiplions par le double de la racine aumenté de 1, soit 11. Il vient 330. Nous prenons son sixième. Il vient 55, qui est la somme des nombres carrés, c'est-à-dire à racines, de 1 à 25.

(s) Somme des nombres cubiques. Nous connaissons le côté du dernier des nombres cubiques dont la somme est désirée. Nous faisons la somme de la suite des nombres de 1 jusqu'à ce nombre comme cela a été expliqué.[48] Nous multiplions le résultat par lui-même. Ce qui provient sera la somme désirée des nombres cubiques.[49]

Exemple de ceci. On veut additionner les nombres cubiques de 1 à 1000. On prend le côté de 1000, soit 10. Faisant la somme des nombres consécutifs de 1 à 10, il vient 55. On le multiplie par lui-même; il vient 3025. En voici la représentation:

$$1 \quad 8 \quad 27 \quad 64 \quad 125 \quad 216 \quad 343 \quad 512 \quad 729 \quad 1000,$$

et leur somme est celle qui a été indiquée.

(t) On désire découvrir un nombre parfait. Prendre les nombres issus du doublement (successif) en partant de 1 et en faire la somme, en incluant 1. Si le résultat est un nombre premier, le multiplier par le dernier nombre atteint. Le résultat sera un nombre parfait.[50]

---

[46] $\sqrt{2 \cdot T_n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = n$, équivalent à $2 \cdot T_n + \frac{1}{4} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = n^2 + n + \frac{1}{4}$.

[47] $\sum_1^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

[48] La sommation des nombres naturels, omise dans la copie conservée, devait donc se trouver dans le texte originel.

[49] $\sum_1^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. On aurait attendu la définition des nombres cubiques, ici ou dans la section précédente.

[50] Si $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ est premier, $2^{n-1}\left(2^n - 1\right)$ sera parfait, comme le démontre Euclide (*Eléments* IX, 36).

Exemple de ceci. On prend 1 et 2, soit le double de 1; il vient 3, qui est un nombre premier car seul le nombre 1 le divise. On multiplie alors 3 par 2, qui est le dernier nombre. Cela fait 6, qui est un nombre parfait. En effet, la somme de ses diviseurs lui est égale: sa moitié est 3, son tiers 2, son sixième 1, et la somme en est 6. C'est le premier des nombres parfaits. Similairement, pour en avoir un autre, on prendra 1, 2, 4; cela fait 7, qui est un nombre premier. Le multipliant par 4, le dernier nombre, on obtient 28, qui est un nombre parfait. En effet, ajoutant ses diviseurs, on obtiendra la même quantité. Ses diviseurs sont: 14, sa moitié; 7, son quart; 4, son septième; 2, son demi-septième; 1, le quart de son septième; la somme en est 28.[51] C'est le deuxième nombre parfait.

(u) Recherche des nombres amiables. Ce sont les nombres dont Platon disait que si on les inscrit sur les repas et les boissons que consomment deux personnes, l'amour naîtra entre elles. La définition de deux nombres amiables est que la somme des parties de chacun d'eux égale la quantité de l'autre. La méthode menant à la connaissance de ces nombres est la suivante. On prend les nombres en proportion double depuis 1 jusqu'où on veut, et on en fait la somme, 1 compris. On ajoute au résultat le dernier des nombres additionnés, et on retient le résultat. Ensuite, on soustrait de ce qu'on a tout d'abord additionné le nombre précédant le dernier des nombres que l'on avait additionnés, et on retient le reste. Si chacun des deux nombres retenus est un nombre premier, on en fait le produit, puis on multiplie le résultat par le dernier des nombres que l'on avait additionnés. Le produit sera l'un des deux nombres amiables. On prend ensuite le double du dernier des nombres que l'on avait additionnés et le nombre précédant le dernier des nombres, mais avec un nombre d'écart. On en fait la somme, et on la multiplie par le nombre qui est le double du dernier des nombres que l'on avait additionnés. On soustrait 1 du résultat. Si le reste est un nombre premier, on le multiplie par le dernier des nombres que l'on avait additionnés; le résultat sera le deuxième nombre amiable de la paire dont nous avons d'abord discuté l'associé.[52] Si les conditions ne sont pas remplies de la manière que j'ai expliquée, on délaissera le nombre que l'on avait atteint lors de la sommation et on appliquera (à nouveau) le procédé décrit ci-dessus. On trouvera alors ce qu'on désire.[53] On procédera de même pour trouver deux autres nombres amiables, et on continuera ainsi aussi loin que l'on veut.

---

[51] Ces vérifications sont inutiles, on les trouvait déjà dans la définition des nombres parfaits.

[52] Soient $u = \left(1+2+2^2+\ldots+2^n\right)+2^n = 2^{n+1}-1+2^n = 3\cdot 2^n-1$, $v = \left(1+2+2^2+\ldots+2^n\right)-2^{n-1} = 2^{n+1}-1-2^{n-1} = 4\cdot 2^{n-1}-1-2^{n-1} = 3\cdot 2^{n-1}-1$, $w = \left(2\cdot 2^n+2^{n-2}\right) 2\cdot 2^n-1 = 4\cdot 2^{2n}+2\cdot 2^{2n-2}-1 = 8\cdot 2^{2n-1}+2^{2n-1}-1 = 9\cdot 2^{2n-1}-1$ (avec $n \neq 0, 1$). Si u, v, w sont premiers, les nombres $2^n\cdot u\cdot v$ et $2^n\cdot w$ seront amiables. C'est le théorème trouvé et démontré par Thābit ibn Qurra (*supra*, note 14).

[53] Le texte arabe contient une deuxième version de la phrase précédente "de la manière que ... ce qu'on désire".

Exemple de ceci. On prend 1, 2, 4, ce qui fait 7. On y ajoute le dernier des nombres, soit 4, ce qui fait 11, qui est un nombre premier. On soustrait de 7 le nombre précédant le dernier nombre additionné, soit 2; il reste 5, qui est un nombre premier. On multiplie alors 11 par 5, ce qui fait 55. On le multiplie par le dernier des nombres que l'on avait additionnés, **(180r)** donc 4, ce qui fait 220. C'est l'un des deux nombres amiables. Ensuite, on ajoute le double du dernier des nombres que l'on avait additionnés, donc 4, dont le double est 8, au nombre qui est séparé de 4 par un nombre, donc 1. Il vient 9. On le multiplie par le nombre qui est le double du dernier des nombres, soit 8, ce qui fait 72. On en soustrait 1. Il reste 71, qui est un nombre premier. On le multiplie par le dernier des nombres que l'on avait additionnés; cela fait 284, qui est le deuxième nombre amiable de la paire. En effet, si on prend les parties de 220, qui sont les nombres qui le divisent, on trouve que sa moitié est 110, son quart 55, son cinquième 44, son dixième 22, sa onzième partie 20, sa vingtième partie, ou son demi-dixième, 11, sa vingt-deuxième partie 10, sa quarante-quatrième partie 5, sa cinquante-cinquième partie 4, sa cent dixième partie 2, sa deux cent vingtième partie 1, et l'addition de ces nombres fait 284, identique à l'autre nombre. Quant à cet autre nombre, 284, sa moitié est 142, son quart 71, sa septante et unième partie 4, sa cent quarante-deuxième partie 2, sa deux cent huitante-quatrième partie 1; lorsque ces nombres sont additionnés, on obtient 220, identique au premier nombre amiable de la paire. Il faut bien comprendre ceci, et on fera de même chaque fois que l'on désirera trouver des nombres amiables, ceci étant la méthode.

(III. Les carrés magiques.)

(*A*) J'ai vu maints écrits sur le sujet du carré magique dus à une multitude (d'auteurs). Mais je n'ai vu personne qui en parle d'une manière aussi générale que Abū ʻAlī ibn al-Haytham. Pour d'autres, parmi lesquels al-Anṭākī, j'ai trouvé qu'ils disaient (seulement) de placer tel nombre dans telle case sans expliquer où en résidait la raison, quoique ce sujet soit difficile à comprendre et demande d'être mémorisé.

Voici ce qu'expliqua Abū ʻAlī ibn al-Haytham. Il a dit que les nombres se partagent en impairs et en pairs, et que le nombre (de cases) des côtés de ces carrés doit nécessairement être un nombre impair ou un nombre pair.

(*B*) Si l'ordre du carré[54] est impair, lorsqu'on y inscrira les nombres selon leur suite naturelle depuis 1 jusqu'au dernier nombre que comprend le grand carré, donc le nombre de petits carrés qu'il inclut, on trouvera que les contenus de ses deux diagonales (principales) sont égaux et que le contenu de toute paire de diagonales situées de part et d'autre d'une diagonale principale et possédant ensemble le même nombre de cases que la diagonale principale est égal au contenu de la diagonale

[54] Nous traduirons désormais ainsi l'expression 'le nombre (de cases) du côté du carré'.

principale. C'est là une des propriétés naturelles de ces nombres, conséquence de leur inscription selon leur suite naturelle à l'intérieur des (petits) carrés.

5	4	3	2	1
10	9	8	7	6
15	14	13	12	11
20	19	18	17	16
25	24	23	22	21

Voici une illustration de ce qu'il a expliqué, dans ce tableau dont le côté a été partagé en cinq parties, en sorte qu'il est divisé en vingt-cinq carrés et où les nombres de 1 à 25 ont été inscrits selon leur suite naturelle. Si on somme le contenu de la diagonale principale composée de 1, 7, 13, 19, 25, le total sera 65. Si on somme le contenu de l'autre diagonale, soit 5, 9, 13, 17, 21, on obtiendra aussi 65. Si on porte (maintenant) son attention sur chaque paire de diagonales de part et d'autre de ces diagonales principales qui ont ensemble le même nombre de cases qu'elles, on trouvera qu'elles contiennent la même quantité. En effet, si on somme le contenu de la diagonale formée de 2, 8, 14, 20, soit quatre cases, et qu'on y ajoute le contenu de la case angulaire, soit 21, ce qui fait au total cinq cases, autant que le nombre des cases de la diagonale (principale), on obtiendra à nouveau 65. De même, si on somme le contenu de la diagonale formée de 3, 9, 15, soit trois cases, et qu'on y ajoute, (passant) de l'autre côté, le contenu de la diagonale à deux cases formée de 16 et 22, on obtiendra à nouveau 65. De même, si on prend le contenu de la diagonale formée de 4 et 10 et qu'on y ajoute, (passant) de l'autre côté, le contenu de la diagonale à trois cases formée de 11, 17, 23, la somme en sera 65. Si, de la même manière, on considère des cases de chaque côté de la seconde diagonale, on trouvera la même chose.

(C) Or donc, lorsqu'il eût trouvé que cette propriété était inhérente aux tableaux ayant un ordre impair, il prescrivit de dessiner deux carrés, d'inscrire dans l'un les nombres selon leur suite naturelle, et de reporter le contenu des deux rangées médianes, verticale et horizontale, dans les deux diagonales de l'autre carré. Il opère (ensuite) le déplacement du contenu des diagonales restantes vers leurs opposées sous de longues conditions qu'il prendrait du temps de mentionner et dont la réalisation présente pour le débutant des difficultés.

5	4	3	2	1
10	9	8	7	6
15	14	13	12	11
20	19	18	17	16
25	24	23	22	21

Or, j'ai déduit de cette méthode une méthode générale, **(180^{v})** (valable) pour tout carré d'ordre impair, quel qu'il soit. C'est la suivante. Si, dans tout carré d'ordre impair, on partage le côté par moitié, le point de section tombera sur le milieu (du bord) de la case (latérale) médiane. On relie alors chaque point sur le milieu d'un côté avec celui du côté perpendiculaire. Il apparaît ainsi un carré oblique. Or nous trouvons que les côtés dudit carré oblique coupent les côtés des (petits) carrés du carré principal. On joint chaque point à son correspondant du côté opposé. Il apparaît alors aussi dans le carré oblique vingt-cinq carrés. Lorsque nous aurons écrit dans le carré principal les nombres selon leur suite naturelle, nous trouverons que treize d'entre eux tombent à l'intérieur des cases du carré oblique cependant que les douze cases restantes sont à diagonales. Nous trouvons (aussi) qu'ont été séparés, dans le carré principal, quatre triangles dont chacun est enfermé par l'un des côtés du carré oblique et deux demi-côtés du carré majeur. Si nous nous imaginons (maintenant) que nous détachions chacun de ces triangles et placions celui de ses côtés qui se confond avec le côté du carré moindre sur le côté opposé de celui-ci, nous trouverons que les trois symboles qui y sont inscrits tombent dans trois des cases à diagonales du carré moindre. Inscrivant alors le contenu de chaque case dans la case qu'elle recouvre, la propriété magique sera complétée dans le carré moindre. C'est là une règle générale, (valable) pour tous les carrés d'ordre impair.

(*D*) A propos du nombre pair, Ibn al-Haytham énonça un théorème général, qu'il posa pour toutes les espèces de (carrés) pairs. C'est le suivant. Les carrés dont le côté est partagé selon un nombre pair (de cases) jouissent en outre d'une seconde propriété[55]: si l'on y inscrit les nombres selon leur suite naturelle, on trouvera que la somme des contenus de deux moitiés complémentaires d'une quelconque paire de rangées verticales ou horizontales à même distance du milieu (du carré) égale ce que contient l'une ou l'autre des diagonales (principales) [puisque les (contenus des) deux diagonales sont dans n'importe quel carré les mêmes][56].

[55]Il n'y avait donc apparemment qu'une seule propriété mentionnée pour le carré naturel impair.

[56]Ceci semble être une glose de lecteur recopiée dans le texte. La propriété de somme constante des

6	5	4	3	2	1
12	11	10	9	8	7
18	17	16	15	14	13
24	23	22	21	20	19
30	29	28	27	26	25
36	35	34	33	32	31

Exemple. Le carré que voici a ses côtés partagés en six, et il contient (donc) trente-six carrés. Si on y inscrit les nombres selon leur suite naturelle et qu'on ajoute la moitié de ce que contient la première ligne, soit 1, 2, 3, à ce que contient la moitié complémentaire de la ligne opposée, soit la moitié contenant 34, 35, 36, le résultat égalera le contenu d'une diagonale (principale). De même, ajoutant le contenu de l'autre moitié de cette ligne, contenant 4, 5, 6, à la moitié complémentaire de son opposée, contenant 31, 32, 33, le résultat égalera le contenu d'une diagonale (principale). De même, ajoutant le contenu de la première moitié de la première colonne, contenant 1, 7, 13, à la moitié complémentaire de son opposée, soit la moitié contenant 24, 30, 36, le résultat égalera le contenu d'une diagonale (principale). De même, ajoutant le contenu de la seconde moitié de la première colonne, contenant 19, 25, 31, à la moitié complémentaire de son opposée, contenant 6, 12, 18, le résultat égalera le contenu d'une diagonale (principale). Il en ira de même pour toute paire de rangées à la même distance du milieu (du carré), qu'il s'agisse de colonnes ou de lignes.

(E) Ibn al-Haytham découvrit alors une méthode dans laquelle il procède à des échanges entre ces nombres pour compléter la somme magique. C'est une méthode compliquée et longue, dont les explications sont difficiles à suivre pour l'étudiant.

(F) Après de profondes réflexions sur la recherche d'une méthode qui soit plus facile, il me vint à l'esprit un moyen pour l'une des deux espèces de ce nombre — car le nombre pair se partage en deux espèces, qui sont le pairement pair et le pairement impair.[57] Il m'apparut donc pour l'inscription des nombres dans des tableaux dont le côté est divisé selon un nombre pairement pair une méthode telle que je ne connais rien de plus facile ni de plus aisé à appliquer.

---

diagonales pour les carrés des ordres pairs était implicitement entendue auparavant (voir le début de cette section D).

[57] Il semblerait donc qu'Ibn al-Haytham ait expliqué, ou commencé par expliquer, une méthode pour les deux ordres pairs $4k$ et $4k+2$.

57	7	6	*60*	*61*	3	2	*64*
16	*50*	*51*	13	12	*54*	*55*	9
24	*42*	*43*	21	20	*46*	*47*	17
33	31	30	*36*	*37*	27	26	*40*
25	39	38	*28*	*29*	35	34	*32*
48	*18*	*19*	45	44	*22*	*23*	41
56	*10*	*11*	53	52	*14*	*15*	49
1	63	62	*4*	*5*	59	58	*8*

C'est la suivante. On dessine un carré dont 8 divise le côté. Puis on y met des points en telle manière que, si nous nous imaginons avoir rabattu l'une des moitiés du carré sur l'autre verticalement et horizontalement, chacun de ces points et son analogue se trouveront superposés, ces points devant occuper des cases en quantité égale à la moitié du nombre de cases du tableau; (**181^{r}**) nous l'avons fait en rouge pour ce tableau, qui est de 8 par 8. Ensuite on commence l'inscription avec 1, en partant de l'angle inférieur du côté gauche. On saute les deux cases suivantes, en disant '2', '3' mais sans n'y rien inscrire. On parvient ensuite à la quatrième et à la cinquième cases, où l'on inscrit 4 et 5. Ensuite on n'inscrit rien dans la sixième et la septième, qui n'ont pas de points, mais on mentionne les nombres explicitement. Puis on inscrit 8 dans la huitième case. Ensuite on revient au début de la deuxième rangée, du côté gauche; (comme) il n'y a pas de point, on dit '9' sans rien inscrire. Ensuite on parvient aux deux cases suivantes, contenant (chacune) un point, où l'on inscrira 10, 11. On continuera de la même façon jusqu'à ce qu'on parvienne à l'angle supérieur droit, où l'on inscrira 64. Puis on revient en sens inverse. On touche du doigt la case contenant 64 en disant '1'. Ensuite on inscrit dans les deux cases suivantes 2, 3. Puis on touche du doigt la quatrième case en disant '4', et de même pour la cinquième case. Puis on inscrit dans la sixième et la septième 6, 7. Ensuite on touche du doigt la huitième en disant '8'. On revient au début de la deuxième rangée du côté droit, et l'on dit '9' en l'y inscrivant. On continue ensuite à énumérer de la sorte la suite des nombres, les inscrivant là où il n'y a rien eu d'inscrit, jusqu'à ce qu'on parvienne, avec 64, à la case où l'on a inscrit 1. Ayant fait ceci, le carré magique est complété dans ce tableau.

On procédera de même pour tout tableau d'ordre pairement pair car il est possible de le partager verticalement et horizontalement en deux moitiés qui puissent elles-même être partagées en deux moitiés.[58] Ainsi, le carré sera partagé en carrés (diagonalement) opposés permettant d'inscrire les points de la manière décrite. Nous avons écrit (les nombres) en noir dans les cases pourvues d'un point et en rouge dans les cases sans point afin que ceci apparaisse plus clairement, si Dieu très-haut y consent.

(G) Quant à l'arrangement dans les carrés des ordres pairement pairs et pairement pairement impairs, nous avons vu un écrit du savant Abū Ḥātim Muẓaffar al-Isfarāyinī, Dieu lui accorde Sa miséricorde, où il a expliqué une méthode plus facile que celle d'al-Anṭākī et celle d'Ibn al-Haytham. Je l'ai rapportée dans cet écrit dont le but est (d'exposer) les méthodes les plus faciles.

1	2	3							3	2	1
4	5 quatrième	6		troisième			deuxième		6	5 premier carré	4
7	8	9							9	8	7
			1	2	3	3	2	1			
	huitième		4	5 septième	6	6	5 sixième	4		cinquième	
			7	8	9	9	8	7			
			7	8	9	9	8	7			
	douzième		4	5 onzième	6	6	5 dixième	4		neuvième	
			1	2	3	3	2	1			
7	8	9							9	8	7
4	5 seizième	6		quinzième			quatorzième		6	5 treizième	4
1	2	3							3	2	1

Pour les (ordres) pairement pairs et pairement pairement impairs, les carrés sont susceptibles d'avoir leurs côtés divisés en quatre parties. Ils se partagent donc en seize carrés égaux en nombre de cases. Ainsi, le carré ayant sur chacun de ses côtés douze cases se partage en seize carrés de trois par trois cases chacun, conformément à cette illustration. On déplace alors le contenu des cases du premier carré dans les cases du seizième carré, chaque rangée du premier dans sa correspondante. On déplace donc le contenu de la case 1 du premier dans la case 1 du seizième, le contenu de la case 2 dans **(181^v)** la case 2, le contenu de la case 3 dans la case 3, en déplaçant

[58] Il apparaît du début de la section que l'ordre doit être divisible par 8. La section suivante inclura le cas des carrés dont le côté est seulement divisible par 4.

ainsi la rangée d'un carré dans celle qui lui correspond dans l'autre en sens inverse. Ensuite, on déplace le contenu du sixième carré dans le onzième, chaque case dans sa correspondante conformément à ce que nous avons écrit en symboles. Ensuite, on déplace le contenu du septième carré dans le dixième carré par des déplacements analogues, et le quatrième à la place du treizième, tout ceci en procédant à des échanges à rebours. Lorsque nous aurons fait ceci, le carré magique sera achevé dans ce tableau.

Nous pourrions tout aussi bien déplacer les huit autres (carrés) en laissant les précédents inchangés. Nous déplacerions alors le deuxième dans la place du quinzième et le quinzième dans la place du deuxième, le troisième dans la place du quatorzième et le quatorzième dans la place du troisième; puis nous déplacerions le huitième dans la place du neuvième et le neuvième dans la place du huitième, et nous déplacerions le douzième dans la place du cinquième et le cinquième dans la place du douzième, tout ceci avec des échanges à rebours. Alors apparaîtra le carré magique. Ceci correspond à ce que nous avons dessiné en rouge. Cette méthode s'applique tant aux carrés pairement pairs qu'aux carrés pairement pairement impairs.

(H) La cause en est que si on inscrit dans n'importe quel tableau ayant comme ordre un nombre pair les nombres selon leur suite naturelle depuis 1 jusqu'à la dernière case, la somme du contenu de deux moitiés (complémentaires) d'une paire de rangées équidistantes du milieu du carré sera égale à la quantité contenue dans chacune des deux diagonales (principales) de ce carré, que ces rangées soient des colonnes ou des lignes.[59]

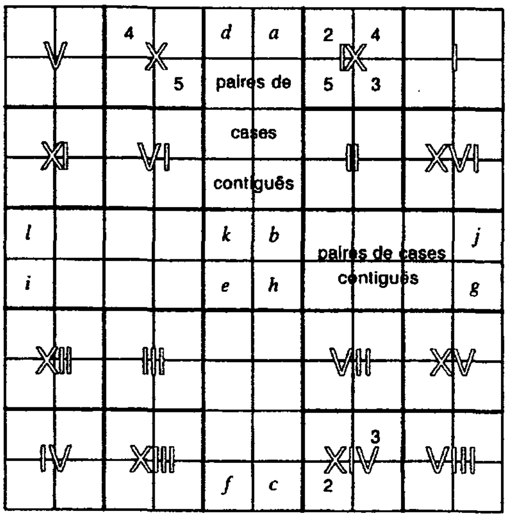
8	7	6	5	4	3	2	1
16	15	14	13	12	11	10	9
24	23	22	21	20	19	18	17
32	31	30	29	28	27	26	25
40	39	38	37	36	35	34	33
48	47	46	45	44	43	42	41
56	55	54	53	52	51	50	49
64	63	62	61	60	59	58	57

[59]La même propriété a été discutée plus haut (notre D). Le compilateur n'a peut-être fait que recopier l'explication d'Asfizārī.

Ce tableau, de 8 par 8, l'illustre. Si nous y inscrivons les nombres selon leur suite naturelle, le contenu des deux diagonales sera toujours le même, à savoir 260 dans le présent tableau. Ainsi, si nous faisons la somme de la moitié droite de la ligne supérieure, contenant 1, 2, 3, 4 et de la moitié gauche de la ligne inférieure, contenant 61, 62, 63, 64, nous obtiendrons 260; si nous faisons la somme de la moitié gauche de la ligne supérieure, contenant 5, 6, 7, 8 et de la moitié droite de la ligne inférieure, contenant 57, 58, 59, 60, la somme en sera 260. Ce qui vaut pour ces lignes vaudra aussi bien si nous prenons n'importe quelle moitié de ligne avec la moitié (complémentaire) de la ligne opposée, à la même distance du milieu du carré: nous trouverons qu'elles contiennent 260. Portons maintenant notre attention sur les colonnes. Prenant la moitié supérieure de la première colonne à droite, contenant 1, 9, 17, 25 avec (l'autre) moitié de son opposée, contenant 40, 48, 56, 64, nous trouverons qu'elles contiennent 260. C'est par l'usage de cette propriété que l'on est amené à ce (mode d') inscription dans les tableaux, en réunissant chaque moitié avec la moitié (complémentaire) opposée, en sorte d'y produire un carré magique. Ceci doit être bien compris, si Dieu très-haut y consent.

(*I*) Section sur l'inscription des nombres dans le carré dont l'ordre est un nombre pairement impair. Cette espèce est la plus difficile de toutes.

Pour établir la magie dans quelque tableau de cette espèce, nous soustrayons toujours 2 de l'ordre du tableau et retenons le reste. Ensuite nous prenons sur les deux diagonales (principales) huit carrés dont le côté de chacun égale le quart du reste retenu. Il apparaît alors dans le tableau seize carrés, égaux tant par leurs côtés que par leur (quantité de) cases, et quatre rangées, deux verticales et deux horizontales, ayant leur intersection dans quatre cases qui occupent le milieu (du carré). On déplace alors les contenus des huit carrés sur les diagonales selon le (mode d') échange enseigné pour la précédente espèce; c'est-à-dire que l'on transpose le contenu de chaque carré d'un coin dans le carré du coin opposé en l'inversant, et celui des voisins des premiers sur les diagonales à l'endroit des voisins des seconds, à nouveau avec inversion. Ensuite, on échange les contenus des quatre cases médianes avec ceux de leurs opposées diagonalement. Ensuite (on considère) dans chacune des deux rangées (médianes) horizontales et verticales un nombre de cases toujours égal à la moitié de l'ordre diminuée de 2, et on échange les contenus entre cases voisines. Puis on déplace le contenu des diagonales de deux des huit autres carrés, ceux auxquels nous n'avons pas touché, vers leurs opposées verticalement et horizontalement.



Nous allons présenter un exemple qui facilitera la compréhension de ce que j'ai expliqué. **(182^r)** Nous prenons un tableau ayant dix cases à son côté, selon cette illustration. Ensuite, nous soustrayons 2 de l'ordre du tableau, soit 10: il reste 8, que nous retenons. Ensuite nous prenons sur les deux diagonales huit carrés, à savoir les carrés I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, dont les côtés égalent uniformément le quart du reste 8, donc 2.[60] Le tableau est ainsi partagé en seize carrés, les huit mentionnés ci-dessus et huit autres qui sont les carrés IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, et en quatre rangées, les deux colonnes *abc* et *def* et les deux lignes *ghi* et *jkl*, se coupant aux quatre cases *b*, *e*, *h*, *k*. Nous déplaçons alors le contenu du carré I dans le carré IV en l'inversant et celui du carré IV dans le carré I, le contenu du carré II dans le carré III et celui du carré III dans le carré II, le contenu du carré V dans le carré VIII et celui du carré VIII dans le carré V, le contenu du carré VI dans le carré VII et celui du carré VII dans le carré VI. Nous déplaçons le contenu de chacune des quatre cases médianes vers son opposée diagonalement, c'est-à-dire que l'on déplace le contenu de la case *b* dans la case *e* et celui de la case *e* dans la case *b*, et que l'on déplace le contenu de la case *h* dans la case *k* et celui de la case *k* dans la case *h*. Ensuite, on déplace les contenus de trois cases de chacune des deux colonnes et lignes vers leurs voisines en procédant par échange; ce sont les cases où il est écrit 'paires de cases contiguës' — que ce soit précisément ces cases ou d'autres à choix dans ces deux (paires de) rangées, en exceptant les quatre cases médianes où l'on a déjà opéré. Nous avons dit 'trois' cases, et pas un autre (nombre), parce que la moitié de l'ordre de ce tableau après soustraction de 2 laisse 3, en sorte que le traitement sera en accord avec ce que nous avons mentionné relativement au

[60]Nous avons ici changé, pour la commodité de la lecture, les désignations arabes.

déplacement de la moitié du contenu de chaque rangée dans la place de la moitié de la rangée dont la distance au milieu égale celle de la ligne de départ, ce qui est le fondement de la magie[61]; selon que le tableau sera plus grand ou moindre[62] que ce tableau, le reste de la division par 2 de l'ordre après soustraction de 2 sera plus grand ou moindre que 3, et nous déplacerons alors (les contenus d'une quantité de cases) égale au reste les uns vers les autres. Ensuite, nous déplaçons le contenu des cases de la première diagonale du carré IX dans les cases de la diagonale du carré X et déplaçons le contenu des cases de la deuxième diagonale du carré IX dans les cases de la diagonale du carré XIV, et nous déplaçons le contenu des cases de la première diagonale du carré XVI dans les cases de la diagonale du carré XV et déplaçons le contenu des cases de la deuxième diagonale du carré XVI dans la diagonale du carré XI, en intervertissant les places des occupants entre (diagonale) d'arrivée et (diagonale) de départ. Nous avons marqué dans les cases des chiffres indiens comme illustration; ainsi, nous déplacerons le contenu de la case 2 dans la case 2, le contenu de la case 3 dans la case 3, et de manière analogue pour tous les autres. Lorsque nous aurons fait ceci et en aurons fini avec toutes (les autres) en accord avec les conditions susmentionnées, le traitement sera achevé et le tableau présentera la magie de cette espèce, si Dieu très-haut le permet.

Dieu seul soit loué, le maître de la création, que Sa bénédiction descende sur Muḥammad et son entourage. La copie a été effectuée à partir de son exemplaire le 11 safar de l'an cinq cent huitante-sept par Ibrāhīm b. Ḥusain al-Rūyānī dans la bibliothèque appartenant à 'Abdarraḥmān b. 'Abdallāh.

III. Texte arabe

Le texte ici publié et la version manuscrite ne diffèrent que de manière insignifiante. Quelques formes grammaticales fautives ont été rectifiées, la lecture de certains termes a été changée lorsque le sens le demandait, et des additions mineures ont été apportées sans que ce soit signalé; en revanche, les additions requises plus importantes sont comprises dans des parenthèses angulaires. Les crochets, eux, enferment des additions ultérieures qu'a incorporées le texte conservé (ci-dessus, notes 53 & 56).

[61] Les quatre cases centrales ayant échangé leurs nombres, on a bien les cinq échanges requis.

[62] De fait, l'ordre ne saurait être inférieur à 10.

(178ʳ) بسم الله الرحمن الرحيم ربّ اعزّ على اتمامه.
الحمد لله على آلائه وصلوته على خير ابريائه.

وبعد فان الله تعالى لم يخوّل شيئًا من الموجودات فى خاصّة يبيّن بها قدرته ويظهر فيها عظمته حتّى جعل فى العدد خواصاً عجيبة ومعانى لطيفة ولم يزل قدماء اليونانيين مثل فثاغورس وغيره يلهجون بما ظهر لهم من عجائب خواصّه ويبالغون فى تعظيمها حتّى انّهم كانوا يجعلونها امثلة يرمزون بها عمّا يلوح لهم من الاشياء الالهيّة لشدّة اعجابهم ولمشابهتها للاشياء الالهيّة فى تقرّبها من الموادّ وقد استخرج اليونانيون انواعًا من العدد وذكروا لها خواصاً عجيبة كافلاطن فانّه يقول فى خواصّ الاعداد المتحابّة والمتباينة ان الاعداد المتحابّة اذا كُتبت على المطاعم والمشارب التى ياكلها شخصان القت بينهما المحبّة والاعداد المتباينة بعكس ذلك وقد عنى باستخراج الاعداد المتحابّة ثابت بن قرّة وأتى عليها بالبراهين الهندسيّة وقد عنى اوقليدس فى كتابه الموسوم بالاصول باستخراج الاعداد التامّة حتّى ظنّ به ان غايته التى اجرى اليها انّما كانت استخراج هذه الاعداد وكذى حُكى عن ثاليس واضع السنن باليونان فيما استخرجه من العدد الوفق وهو من اعجب ما ظهر من خواصّ العدد.

٢	٩	٤
٧	٥	٣
٦	١	٨

د	يد	يه	ا
ط	ز	و	يب
ه	يا	ى	ح
يو	ب	ج	يج

يح	كب	ا	ى	يد
كد	ج	ز	يا	ك
ه	ط	يج	يز	كا
و	يه	يط	كج	ب
يب	يو	كه	د	ح

ومعناه ان يرسم مربّع متساوى الاضلاع ويقسم كلّ ضلع من اضلاعه بما يراد من العدد اقسامًا متساوية فى العدد والمقدار ويخرج من موضع كلّ قسم الى نظيره من الضلع المقابل له خطوط مستقيمة فيُقسم ذلك المربّع بمربّعات يكون عددها مثل ضرب اقسام ضلع المربّع فى مثلها كما قد قسمنا اضلاع هذا المربّع كلّ واحد منها بثلثة اقسام متساوية واخرجنا من كلّ قسم الى نظيره خطوطاً متوازية فقسمت المربّع بتسعة مربّعات ورُسم فى هذه المربّعات ⟨العدد⟩ من الواحد الى التسعة رسمًا كيف عدّ طولًا وعرضاً وقطرًا وُجد خمسة عشر وكذلك لو قُسم كلّ ضلع باربعة اقسام وفُعل به كذلك الّا انقسم بستّة عشر مربّعًا ثمّ رُسم فيه العدد من الواحد الى ستّة

عشر رسمًا كيف عدّ طولًا وعرضاً وقطرًا وُجد اربعة وثلثون وكذلك لو قُسم كلّ ضلع ⟨من⟩ اضلاع المربّع بخمسة اقسام وفُعل به كذلك الّا انقسم بخمسة وعشرين مربّعًا ثمّ أُثبت فيه ⟨العدد⟩ من الواحد الى خمسة وعشرين اثباتًا كيف عدّ طولًا وعرضاً وقطرًا وُجد خمسة وستّون على هذا المثال ولهذه الاعداد من الخواصّ ما سنذكره فيما بعد فحُكى عن ثاليس هذا انّه اتّخذ لوحاً قُسم كلّ ضلع من اضلاعه بمائة فحدث فيه عشرة آلاف مربّع فثُبت فيه العدد من الواحد الى العشرة آلف اثباتًا كيف عدّ طولًا وعرضاً وقطرًا وُجد عدد وفق وانّه وضع هذا اللوح فى هيكل من هياكلهم وكان اهل تلك الاقاليم يقسمون به فى حكوماتهم ويستشفون به فى امراضهم·

(*a*) العدد هو جماعة مولّفة من وحدات·

(*b*) العدد الزوج هو الذى ينقسم بنصفين صحيحين بغير كسر·

(*c*) العدد الفرد هو الذى يزيد على الزوج واحدًا·

(*d*) العدد الاوّل هو الذى ليس يعدّه عدد غير الواحد فقط مثل الثلثة والخمسة والسبعة والاحد عشر فان كلّ واحد من هذه ليس يوجد عدد يعدّه فيفنيه غير الواحد فقط·

(*e*) العدد المركّب هو الذى يُعدّ بعدد آخر غير الواحد مثل الستّة فانّها يعدّها الاثنان ثلث مرّات ويعدّها الثلثة مرّتين ومثل الثمانية فانّها يعدّها الاربعة مرّتين ويعدّها الاثنان اربع مرّات ومثل الاثنى عشر فانّها يعدّها الاربعة ثلث مرّات والثلثة اربع مرّات والستّة مرّتين والاثنان ستّ مرّات·

(*f*) العددان المتباينان هما اللذان لا يعدّهما جميعًا فيفنيهما عدد آخر الّا الواحد فقط وذلك مثل الخمسة والتسعة فانّه لا يوجد عدد آخر يعدّهما جميعًا فيفنيهما الّا الواحد·

(*g*) العددان المشتركان هما اللذان يعدّهما عدد آخر فيفنيهما مثل خمسة عشر واثنى عشر فانّهما مشتركان فى الثلثة لانّ الثلثة يعدّهما فيفنيهما ومثل عشرة وستّة فانّهما مشتركان فى الاثنين لانّ الاثنين يعدّهما فيفنيهما·

(*h*) ومن ذلك العددُ المثلّث وهو الذى يجتمع من الواحد والاثنين والثلثة على الولاء الى ما تريد فحيث انتهى فهو عدد مثلّث وضلعه هو اكثر الاعداد مثل ثلثة وهو اوّل الاعداد المثلّثة لانّها مجتمعة من واحد ⟨واثنين⟩ وضلعها اثنان ومثل ستّة فانّها مجتمعة من واحد واثنين وثلثة ومثل عشرة فانّها مجتمعة من واحد واثنين وثلثة واربعة ومثل خمسة عشر (178^v) فانّها مجتمعة من واحد واثنين وثلثة واربعة وخمسة·

(*i*) ومن ذلك العددُ المربّع وهو ما يجتمع من ضرب عدد فى نفسه والعدد المضروب فى نفسه هو جذر ما يجتمع ويقال له ضلعه مثل اربعة فانّها مجتمعة من ضرب اثنين فى اثنين وهو اوّل الاعداد المربّعة وضلعها اثنان·

(j) ومن ذلك الاعداد المدرّجة وهى ما يكون من ضرب الواحد فى الاثنين وضرب الاثنين فى الثلثة وضرب الثلثة فى الاربعة الى ما لا نهاية له.

(k) ومن ذلك العددُ التامّ وحدّه ان يكون مساويًا لجميع اجزائه اعنى الاعداد التى تعدّه مع الواحد وذلك مثل الستّة وهى اوّل الاعداد التامّة وذلك ان الواحد يعدّها ستّ مرّات والاثنان يعدّها ثلث مرّات والثلثة مرّتين فهى نصفها واذا جُمع الواحد والاثنان والثلثة كان ستّة وهو مساوٍ للستّة ⟨المفروضة⟩ ومثل ثمانية وعشرين وذلك ان الاربعة عشر تعدّها مرّتين فهى نصفها والسبعة تعدّها اربع مرّات فهى رُبعها والاربعة تعدّها سبع مرّات فهى سُبعها والاثنان يعدّها اربع عشرة مرّةً فهما نصف سُبعها والواحد يعدّها ⟨ثمان وعشرين مرّةً⟩ فهو رُبع سُبعها واذا جُمع الاربعة عشر والسبعة والاربعة والاثنان والواحد كان ثمانية وعشرين وهو مثل العدد المفروض.

(l) ومن ذلك الاعداد المتحابّة وعددان متحابّان هما عددان اذا جُمع الاعداد التى تعدّ كلّ واحد منهما كان ذلك مساويًا للعدد الآخر.

(m) اذا اردت ان تجمع الاعداد الافراد فخذ العدد الزوج الذى يكون بعد الفرد الاخير وخذ نصفه فاضربه فى نفسه فهو مطلوبك.

مثال ذلك ان تجمع الاعداد الافراد على الولاء من الواحد الى التسعة على النظم الطبيعى فأخذت العدد الزوج الذى يلى التسعة بعدها وهو عشرة فأخذت نصفها ⟨وهو خمسة⟩ فضربتها فى نفسها فكان خمسة وعشرين وهو جميع الاعداد الافراد من الواحد الى التسعة وهذا عدد يكون مربّعًا له جذر.

(n) وان اردت ان تجمع الاعداد الازواج من الاثنين على النظم الطبيعى الى ما اردت من الازواج فاضرب نصف العدد الزوج الذى هو آخر الاعداد فى اكثر من النصف بواحد فهو المطلوب.

مثال ذلك ان تجمع من الاثنين الى الاثنى عشر فأخذت نصفه وهو ستّة فضربته فى اكثر من النصف بواحد وهو سبعة فكان اثنين واربعين وهو جميع الاعداد الازواج من الاثنين الى الاثنى عشر.

(o) ان اردت ان تجمع الاعداد المدرّجة فخذ العدد الاخير الذى تريد ان تجمع اليه وخذ اكثر منه بواحد واقلّ منه بواحد فيكون ثلثة اعداد لاحد ثُلث صحيح ابدًا ثمّ اضرب العددين اللذين ليس لكلّ واحد منهما ثُلث صحيح احدهما فى الآخر فما خرج من الضرب فاضربه فى ثُلث العدد الذى له ثُلث صحيح فما خرج فهو جميع تلك الاعداد.

مثال ذلك ان تجمع ⟨ما كان⟩ من ضرب واحد فى اثنين واثنين فى ثلثة وثلثة فى اربعة واربعة فى خمسة وكذلك الى تسعة فى عشرة فأخذت اكثر من العشرة بواحد وهو احد عشر واقلّ ⟨من العشرة⟩ بواحد وهو تسعة ثمّ ضربت العشرة فى الاحد عشر فكان مائة وعشرة فضربت ذلك فى ثُلث التسعة وهو ثلثة فكان ثلثمائة وثلثين وهو جميع تلك الاعداد.

(p) اذا اردت ان تجمع الاعداد على الضعف وهو الذى يعرف باضعاف بيوت الشطرنج وهو ان تضرب ما فى البيت الثانى فى نفسه فيخرج لك ما فى البيت الذى هو اقلّ من ضعف الثانى بواحد اعنى البيت الثالث فان نقصت من ذلك واحدًا كان الباقى جميع ما فى البيتين الاوّل والثانى وان لم تنقص منه الواحد وضربته فى نفسه خرج لك ما فى البيت الذى هو اقلّ من ضعف الثالث بواحد وهو ما فى البيت الخامس فان نقصت من ذلك واحدًا كان الباقى جميع ما فى البيت الاوّل والثانى والثالث والرابع.

مثال ذلك انّك اردت ان تضعف بيوت الشطرنج فضربت ما فى البيت الثانى وهو اثنان فى نفسه فكان اربعة فهو ما فى البيت الثالث فان نقصت منها واحدًا كان الباقى ما فى البيت الاوّل والثانى ثمّ اذا ضربت ما في البيت الثالث وهو اربعة فى نفسه خرج لك ما في البيت الخامس وهو اقلّ من ضعف الثالث بواحد فان نقصت من ذلك واحدًا كان الباقي جميع ما فى البيت الاوّل والثانى والثالث والرابع.

ثمّ اذا ضربت ما فى البيت الخامس فى نفسه خرج لك ما في البيت التاسع وهو اقلّ من ضعف الخامس بواحد فان نقصت من ذلك واحدًا كان الباقى جميع ما فى البيوت الثمانية ثمّ اذا ضربت ما فى البيت التاسع في نفسه خرج ما فى البيت السابع عشر وهو اقلّ من ضعف التاسع بواحد فاذا نقصت من ذلك واحدًا كان الباقى جميع ما فى البيوت الستّة عشر ثمّ اذا ضربت ما فى البيت السابع عشر فى نفسه كان الخارج ما فى البيت الثالث والثلثين وهو اقلّ من ضعف السبعة عشر بواحد فاذا نقصت من ذلك واحدًا كان الباقى ⟨جميع⟩ ما فى البيوت الاثنين والثلثين ثمّ اذا ضربت ما فى البيت الثالث والثلثين فى نفسه خرج ما فى البيت الخامس والستّين وهو اقلّ من ضعف الثلثة والثلثين بواحد فاذا نُقص من ذلك واحد كان الباقى جميع ما فى بيوت الشطرنج واذا تركته بحاله كان ذلك ضعف ما فى البيت الرابع والستّين فاذا أخذت نصفه كان ⟨ذلك ما⟩ فى البيت الرابع والستّين وقانونه ان تضرب الاربعة فى الاربعة ثمّ تضرب الخارج فى نفسه ثمّ ما خرج فى نفسه ثمّ ما خرج

فى نفسه (179r) ثمّ ما خرج فى نفسه فيساوى ذلك جميع تضاعيف الشطرنج بزيادة واحد وهذا الذى قيل انّه من اربعة فى اربعة ⟨اربع مرّات⟩ مربّعة.

مثال ذلك انّا ضربنا اربعة فى اربعة فكان ستّة عشر فهى ما فى البيت الخامس فضربناها فى نفسها فكان ٢٥٦ وهى ما فى البيت التاسع ثمّ ضربنا ذلك فى نفسه فبلغ ٦٥٥٣٦ وهى ما فى البيت السابع عشر ثمّ ضربناه فى نفسه فبلغ ٤٢٩٤٩٦٧٢٩٦ وهو ما فى البيت الثالث والثلثين ثمّ ضربنا ذلك فى نفسه فبلغ ١٨٤٤٦٧٤٤٠٧٣٧٠٩٥٥١٦١٦ وهو ضعف ما يقع فى البيت الذى هو اخير بيوت الشطرنج فاذا نُقص منه ⟨واحد⟩ كان الباقى جميع ما يقع فى بيوت الشطرنج جميعها واذا نصّف قبل نقصان الواحد منه كان ذلك ما يقع فى البيت الرابع والستّين وجملة ما يقع فى البيوت الاربعة والستّين وهو جملة تضاعيف الرقعة ثمنية عشر الف الف الف الف الف الف واربعمائة وستّة واربعون الف الف الف الف الف ⟨الف⟩ وسبعمائة واربعة واربعون الف الف الف الف وثلثة وسبعون الف الف الف وسبعمائة وتسعة الف ⟨الف⟩ وخمسمائة احد وخمسون الفًا وستّمائة وخمسة عشر.

تحقّق عند القدماء ان سطح الارض كرىّ وانّها فى وسط الفلك وان سطحها موازٍ لسطح الفلك وارادوا ان يعلموا مساحة الارض بالاذرع فعمدوا الى نقطة ثابتة من الفلك كالقطب مثلًا فرصدوا ارتفاعها عن سطح الافق الذى رصدوا فيه فوجدوا ارتفاعه مقدارًا ما وعلموا مكانهم علامةً ثمّ ساروا على دائرة واحدة من الدوائر المرسومة فى سطح الارض اعنى الدائرة التى رسمها دائرة نصف النهار المارّة بالقطبين فمن البيّن انّهم اذا ساروا الى جهة القطب فهم ينحدرون على كروية الارض فالقطب لا يزال يرتفع عنهم وان ساروا مستديرين القطب فالقطب لا يزال يتحفظ عنهم فلم يزلوا سائرين ⟨الى جهة القطب⟩ وهم يرصدون ارتفاع القطب بالآلات التى اتّخذوها للارتفاعات الى ان وجدوا ارتفاع القطب قد تغيّر مقدارَ درجة واحدة وهم مع ذلك يذرعون الارض من الموضع الذى بدأوا بالرصد فيه الى الموضع الذى انتهوا اليه فوجدوا ذلك ستّة وخمسين ميلًا وثُلثى ميل ⟨على انّ الميل⟩ ثلثة آلاف ذراع بالذراع السواد التى وضعها المأمون فتبيّن لهم ان مقدار الدرجة الواحدة من محيط اعظم دائرة من دوائر الارض هذا المقدار المقدّم ذكره اعنى ستّة وخمسين ميلًا وثُلثى ميل فضربوا ذلك فى ثلثمائة وستّين بلغ ٢٠٤٠٠ وهو محيط اعظم دائرة يقع على الارض ولمّا كان ارشميدس قد بيّن فى مساحة الدائرة انّ محيط مثل القطر ثلث مرّات وقريبًا من سُبع مرّة قُسم ذلك على ثلثة وسُبع خرج ٦٤٩١ ميلًا وهو قطر الارض اعنى الخطّ الخارج من نقطة المشرق الى نقطة المغرب مارًّا بمركز الارض.

ولمّا كان قد بيّن ارشميدس ايضاً انّ ضرب قطر الكرة فى محيط اعظم دائرة عليها هو مساوٍ لمساحة جميع سطحها فضربنا القطر فى محيط اعظم دائرة بلغ ١٣٢٤١٦٤٠٠ ميلًا ولمّا كان الميل المكسّر من اربعة الٓف ذراع فى مثلها ⟨الذى⟩ يكون ستّة عشر الف ⟨الف⟩ ذراع ضربنا ستّة عشر الف الف ذراع فى ما خرج من اميال مساحة بسيط الارض بلغ ذلك ٢١١٨٦٦٢٤٠٠٠٠٠٠٠٠ ذراع فيكون مساحة جميع بسيط الارض برّها وبحرها وسهلها وجبلها وعامرها وغامرها الفى الف الف الف الف ذراع ومائة وثمانية ⟨عشر الف الف الف وستّمائة واثنين وستّين⟩ الف الف الف واربعمائة الف الف ذراع وقد أخذنا مقدار قطر درهم من الدراهم الواضية وقدّرنا به طول الذراع المقدّم ذكره فوجدناه يزيد على اثنين وعشرين فيكون بسيط الذراع المكسّر نحوًا من خمسمائة درهم فضربنا خمسمائة فى الاذرع التى هى مساحة بسيط الارض خرج عدد ما اذا بسط بسيط الارض دراهم كان ١٠٥٩٣٣١٢٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ مبلغه الف الف الف الف الف الف وتسعة وخمسون الف الف الف الف وثلثمائة احد وثلثون الف الف الف الف ومائتا الف ⟨الف⟩ الف درهم فاذا قسنا هذه العدّة الى تضاعيف رقعة الشطرنج نجد عدد تضاعيف الرقعة مثل هذه سبع عشرة مرّةً وخُمس مرّة بالتقريب.

(*q*) اذا اردنا ان نجمع الاعداد المثلّثة على الولاء من الواحد الى ما نريد وضلع كلّ عدد منها هو آخر ما ينتهى اليه فانّا نعرف ضلع آخر الاعداد المثلّثة التى نريد ان نجمعها فما كان ضربناه فى ثُلث العدد المثلّث الذى يلى آخر الاعداد المثلّثة التى نريد ان نجمعها فما كان فهو جميعها مثال ذلك انّا اردنا ان نجمع الاعداد المثلّثة من الواحد الى ثمانية وعشرين فأخذنا ضلع ثمانية وعشرين وهو سبعة فضربناه فى ثُلث المثلّث الذى يلى ثمانية وعشرين وهو ستّة وثلثون وثُلثه اثنا عشر فيكون ذلك اربعة وثمانين وهو مبلغ جمع المثلّثات وهذه صورتها

واحد ثلثة ستّة عشرة خمسة عشر احد وعشرون ثمانية وعشرون.

فان كان لنا عدد واردنا ان نعلم هل هو مثلّث ام لا واذا كان مثلّثًا كم يكون ضلعه فانّا نضعف ذلك العدد ونزيد عليه رُبع واحد فان كان لما يجتمع من ذلك (179^v) جذر صحيح وزيادة نصف واحد فان العدد مثلّث واذا اسقط من ذلك الجذر النصف الزائد على العدد الصحيح كان الباقى ضلع ذلك العدد المثلّث.

مثال ذلك عدد ثمانية وعشرون فانّا نضعفه يكون ستّة وخمسين ونزيد عليه رُبع واحد ونأخذ جذره يكون سبعة ونصفًا فنعلم ان ثمانية وعشرين عدد مثلّث فاذا

اسقطت النصف الزائد على سبعة بقى سبعة وهو ضلع ثمانية وعشرين.

(r) فى جميع الاعداد المربّعة وهى الاعداد المجذورة اذا اردنا ذلك أخذنا جذر آخر الاعداد وهو الذى نريد ان نجمع اليه فنضربه فى اكثر منه بواحد ثمّ نضرب ما اجتمع فى ضعف ذلك الجذر وزيادة واحد ثمّ نأخذ سُدس ما اجتمع فما كان فهو جميع الاعداد المربّعة التى اردنا ⟨جميعها⟩.

مثال ذلك اردنا ان نجمع الاعداد المجذورة من الواحد الى خمسة وعشرين فأخذنا جذر خمسة وعشرين وهو خمسة فنضربه فى اكثر منه بواحد وهو ستّة فيكون ثلثين فنضرب ذلك فى ضعف الجذر وزيادة واحد وهو احد عشر فكان ثلثمائة وثلثين فأخذنا سُدسها فكان خمسة وخمسين وهو جميع الاعداد المربّعة اعنى المجذورة من الواحد الى خمسة وعشرين.

(s) جميع الاعداد المكعّبة فانّا نعرف ضلع المكعّب الذى هو آخر الاعداد المكعّبة التى نريد ان نجمعها فنجمع من الواحد اليه على النظم الطبيعى كما بيّن فما كان ضربناه فى نفسه فما اجتمع فهو ⟨جميع⟩ الاعداد المكعّبة التى نريد ان نجمعها.

مثال ⟨ذلك⟩ انّك اردت ان تجمع الاعداد المكعّبة من الواحد الى الالف فأخذت ضلع الالف وهو عشرة فجمعت من الواحد الى العشرة على النظم الطبيعى فكان خمسة وخمسين فضربتها فى مثلها فكان ثلثة الٓف وخمسة وعشرين وهذه صورته

ا ح كز سد قكه ريو شمج ثيب ذكط غ

يكون مجموعها ما ذكرناه.

(t) اذا اردت ان تجد العدد التامّ فخذ الاعداد التى تتضاعف من الواحد فاجمعها والواحد معها فان كان ذلك عددًا اوّلًا فاضربه فى آخر الاعداد الذى انتهيت اليه فما اجتمع فهو عدد تامّ.

مثال ذلك انّك أخذت الواحد والاثنين اللذين هما ضعف الواحد فكان ثلثة وهو عدد اوّل لانّه لا يعدّه ⟨عدد⟩ غير الواحد فتضرب ثلثة فى اثنين اللذين هما آخر الاعداد فيكون ستّة وهو عدد تامّ وذلك ان مجموع كسوره مساوٍ له لان نصفه ثلثة وثُلثه اثنان وسُدسه واحد ومجموع ذلك ستّة وهذا اوّل الاعداد التامّة وكذلك اذا اردت غيره أخذت واحدًا واثنين واربعة فيكون سبعة وهو عدد اوّل فضربتها فى اربعة التى هى آخر الاعداد فكان ثمانية وعشرين وهى عدد تامّ وذلك انّك اذا جمعت كسورها كان مثلها وكسورها اربعة عشر نصفها وسبعة رُبعها واربعة سُبعها واثنان نصف سُبعها وواحد رُبع سُبعها ومجموع هذا ثمانية ⟨وعشرون⟩ وهذا هو العدد التامّ

⟨الثانى⟩.

(u) فى طلب الاعداد المتحابّة هذه هى الاعداد التى قال افلاطُن انّها اذا كُتبت على المطاعم والمشارب التى ياكلها شخصان القت بينهما المحبّة وحدّ العددين المتحابّين ان جميع اجزاء كلّ واحد منهما مساوٍ لجملة الآخر والطريق الى معرفة هذه الاعداد ان تأخذ الاعداد المتضاعفة من الواحد الى ما احببت وتجمعها والواحد معها وتزيد على ذلك العددَ الاخير ⟨من الاعداد⟩ التى جمعت وتحفظ ذلك ثمّ تنقص ممّا جمعت اوّلًا العدد الذى يلى آخر الاعداد الذى كنت جمعت اليه قبله وتحفظ ما بقى فان كان كلّ واحد من العددين المحفوظين عددًا اوّلًا ضربت احدهما فى الآخر فما اجتمع ضربته فى العدد الذى هو آخر الاعداد التى كنت جمعت فما بلغ فهو احد العددين المتحابّين ثمّ تأخذ العدد الذى هو ⟨مثلا⟩ العدد الاخير من الاعداد التى كنت جمعت والعدد الذى قبل آخر الاعداد وبينه وبينه عدد واحد فتجمعهما وتضرب ذلك فى العدد الذى هو مثلا آخر الاعداد التى كنت جمعت فما اجتمع نقصت منه واحدًا فان كان الباقى عددًا اوّلًا ضربته فى العدد الذى هو آخر الاعداد التى كنت جمعت فما اجتمع فهو العدد الثانى من العددين المتحابّين الذى بدأنا بذكر قرينه فان لم تصحّ الشرائط على ما وصفتُ تجاوزتَ ⟨العدد⟩ الذى كنت انتهيت اليه عند الجمع واستعملت ما ذكرتُ فانّك ستجد ما تريده وكذلك ان اردت ان تجد عددين آخرين متحابّين [على هذه الصفّة تجاوزت ذلك العدد وفعلت به مثل ما تقدّم فانّك تجد ما تريد] وعلى ذلك الى ما شئت من الاعداد.

مثال ذلك أخذت الواحد والاثنين والاربعة فكان سبعة وزدت على ذلك آخر الاعداد وهو اربعة فيكون احد عشر ⟨وهو عدد اوّل⟩ فنقصت من ذلك العددَ قبل آخر الاعداد الذى زدته وهو اثنان فيبقى خمسة وهو عدد اوّل فضربت احد عشر فى خمسة فكان خمسة وخمسين فضربت ذلك فى آخر الاعداد التى كنت جمعت (180^r) وهو اربعة فكان ذلك مائتين وعشرين وهو احد العددين المتحابّين ثمّ زدت مثلى آخر الاعداد التى جمعت وهو اربعة ومثلاه ثمانية على العدد الذى بينه وبينه عدد واحد وهو واحد فصار تسعة فضربت ذلك فى العدد الذى هو مثلا آخر الاعداد وهو ثمانية فكان اثنين وسبعين فنقصت منه واحدًا فبقى احد وسبعون وهو عدد اوّل فضربته فى آخر الاعداد التى كنت جمعت فبلغ مائتين واربعة وثمانين وهو العدد الثانى من العددين المتحابّين وذلك انّك اذا أخذت اجزاء مائتين وعشرين وهى الاعداد التى تعدّها وجدت نصفها مائة وعشرة ورُبعها خمسة وخمسين وخُمسها اربعة واربعين وعُشرها اثنين وعشرين وجزؤها من احد عشر عشرين وجزؤها ⟨من⟩ عشرين وهو

نصف عُشرها احد عشر وجزؤها من اثنين وعشرين عشرة وجزؤها من اربعة واربعين خمسة وجزؤها من خمسة وخمسين اربعة وجزؤها من مائة وعشرة اثنين وجزؤها من مائتين وعشرين واحدًا واذا جمعت هذه الاعداد كانت مائتين واربعة وثمانين وهى مثل العدد الآخر وامّا العدد الآخر الذى هو مائتان واربعة وثمانون فان نصفه مائة ⟨واثنان واربعون ورُبعه احد وسبعون وجزؤه من احد وسبعين اربعة وجزؤه من مائة⟩ واثنين واربعين اثنان وجزؤه من مائتين واربعة وثمانين واحد وهذه الاعداد اذا جُمعت كانت مائتين وعشرين وهى مثل العدد الاوّل من العددين المتحابّين فافهم ذلك وعلى هذا كلّما اردت استخراج الاعداد المتحابّة فهذا طريقه·

(*A*) وقد رأيتُ عدّة رسائل فى هذا المعنى وهو العدد الوفق لجماعة فلم ار احدًا يكلّم فيه بطريق كلىّ الّا ابى علي بن الهيثم فامّا آخرون كالانطاكى وغيره وجدتهم يقولون يثبت العدد الفلانى فى البيت الفلانى من غير تبيين علّة فى ذلك وهذا ممّا يصعب فهمه ويحتاج الى حفظ·

فامّا ما ذكره ابو علي بن الهيثم فانّه قال ان العدد ينقسم الى الفرد والزوج وان هذه المربّعات لا يخلو ⟨عدد⟩ اضلاعها من ان يكون عددًا فردًا او زوجاً·

(*B*) فان كان عدد ضلع المربّع فردًا فانّه اذا أُثبت فيه العدد على النظم الطبيعى من الواحد الى آخر عدد يحتوى عليه المربّع الاعظم ⟨الذى هو العدد⟩ من المربّعات الصغار الذى حازها فانّه يوجد ما فى قطريه متساويًا ويوجد ما فى كلّ قطرين عن جنبتى القطر الاعظم عدد بيوتهما مثل عدد بيوته مثل ما فى القطر الاعظم وهذا خاصّة من خواصّ العدد الطبيعية لهذه الاعداد اذا أُثبتت فى هذه المربّعات على النظم الطبيعى·

ه	د	ج	ب	ا
ى	ط	ح	ز	و
يه	يد	يج	يب	يا
ك	يط	يح	يز	يو
كه	كد	كج	كب	كا

وهذا مثال ما ذكر فى هذا الجدول قد قُسم ضلعه بخمسة اقسام فانقسم بخمسة وعشرين مربّعًا وكتب فيها العدد من الواحد الى خمسة وعشرين على النظم الطبيعى فاذا عدّ ما ⟨فى⟩ احد القطرين الاعظمين الذى فيه اَ زَ يجَ يطَ كهَ كان

مجموعها خمسة وستّين واذا عدّ ما فى القطر الآخر وهو ه ط يج يز كا كان ايضاً خمسة وستّين فاذا اعتمد على كلّ قطرين عن جنبتى هذين القطرين عدّتهما مثل عدّته وجد فيهما مثل ما فيه وذلك انّه اذا جُمع ما فى القطر الذى فيه ب ح يد ك وهو اربعة بيوت واضيف اليه ما فى بيت الزاوية التى فيها كا كان مجموع البيوت خمسة وهى كعدّة ابيات القطر فكان العدد ايضاً خمسة وستّين وكذلك اذا جُمع ما فى القطر الذى فيه ج ط يه وهو ثلثة ابيات واضيف اليه من الجانب الآخر ما فى القطر الذى هو بيتان الذى فيهما يو كب كان ذلك ايضاً خمسة وستّين وكذلك ان أخذ ما فى القطر الذى فيه د ى واضيف اليه من الجانب الآخر ما فى القطر الذى هو ثلثة ابيات الذى فيها يا يز كج كان مجموع ذلك خمسة وستّين وكذلك اذا اعتبرت الابيات التى عن جنبتى القطر الآخر وجدت كذلك.

(C) فهو لمّا وجد هذه الخاصّة لازمة فى هذه الجداول التى اضلاعها عدد فرد امر ان يُرسم مربّعان ويثبت فى احدهما العدد على النظم الطبيعى ويثبت ما فى السطرين الاوسطين من سطور الطول والعرض فى القطرين من المربّع الآخر ويعتمد نقل ما فى الاقطار الباقية الى نظائرها بشرائط طويلة يطول ذكرُها ويصعب على المبتدىء عملُها.

ه	د	ج	ب	ا
ى	ط	ح	ز	و
يه	يد	يج	يب	يا
ك	يط	يح	يز	يو
كه	كد	كج	كب	كا

فاستنبطتُ من هذه الطريقة طريقة كليّة (180^v) لكلّ مربّع ضلعه عدد فرد كائنًا ما كان وهى هذه وذاك ان كلّ مربّع عدد ضلعه فرد فانّه اذا قُسم ضلعه بنصفين فان القسمة تقع فى وسط البيت الاوسط فنخطّ خطوطاً من كلّ نقطة فى نصف الضلع الى الاخرى من الضلع القائم عليه فحدث مربّع على السوك و نجد اضلاع هذا المربّع الذى على السوك تقاطع اضلاع المربّعات التى فى المربّع الاوّل فنخطّ ⟨خطوطًا⟩ من كلّ نقطة الى نظيرها من الضلع المقابل له فيحدث فى المربّع الذى على السوك ايضاً خمسة وعشرون مربّعًا فاذا كنّا قد كتبنا فى المربّع الاوّل العدد على النظم الطبيعى

نجد قد وقع منها فى بيوت المربّع الذى على السوك ثلثة عشر عددًا وقد بقى من بيوته اثنا عشر بيتًا لها اقطار و نجد قد فصل من المربّع الاوّل اربعة مثلّثات كلّ واحد منها يحيط به ضلع من اضلاع المربّع الذى على السوك ونصفا ضلعين من المربّع الاكبر فاذا توهّمنا انّا قد رفعنا كلّ مثلّث من هذه المثلّثات ووضعنا ضلعه الذى هو احد اضلاع المربّع الاصغر على ضلعه المقابل له فانّا نجد الثلثة الاحرف المثبتة فيه تقع على ثلثة بيوت من بيوت المربّع الاصغر التى لها الاقطار فاذا اثبتنا ما فى كلّ بيت فى البيت الذى ينطبق عليه تمّ فى المربّع الاصغر العدد الوفق وهذا قانون مطّرد فى جميع المربّعات التى ضلعها عدد فرد.

و	ه	د	ج	ب	ا
يب	يا	ى	ط	ح	ز
يح	يز	يو	يه	يد	يج
كد	كج	كب	كا	ك	يط
ل	كط	كح	كز	كو	كه
لو	له	لد	لج	لب	لا

(*D*) فامّا العدد الزوج قال ابن الهيثم فيه قولًا كلّيًا وجعله لجميع انواع الزوج وذاك ان لهذه المربّعات التى اضلاعها مقسومة بعدد زوج خاصّة اخرى غير تلك وهو انّه اذا أُثبت فيها العدد على النظم الطبيعى وُجد ما فى نصفى كلّ سطرين ⟨بعدُهما عن الوسط بعد واحد⟩ من سطور الطول والعرض اذا جُمعا على التبادل وجد ما فيهما مثل ما فى كلّ واحد من القطرين [لانّ القطرين فى كلّ مربّع يكونان متساويين].

مثاله هذا المربّع الذى اضلاعه مقسومة بستّة ستّة وفيه ستّة وثلثون مربّعًا اذا أُثبت فيه العدد على النظم الطبيعى وجُمع نصف ما فى السطر الاوّل من سطور العرض وهو ا ب ج الى نصف ما فى نظيره من سطور العرض على التبادل وهو النصف الذى فيه لد له لو لكان مثل ما فى القطر وكذلك لو جُمع ما فى النصف الآخر من هذا السطر الذى فيه د ه و الى النصف المبادل له من نظيره الذى فيه لا لب لج لكان مثل ما فى القطر وكذلك لو جُمع ما فى النصف ⟨الاوّل من السطر الاوّل⟩ من سطور الطول الذى فيه ا ز يج الى

النصف المبادل له من نظيره وهو النصف الذى فيه كد ل لو لكان مثل ما فى القطر وكذلك لو جُمع ما فى النصف الآخر من ⟨السطر الاوّل من⟩ سطور الطول الذى ⟨فيه⟩ يط كه لا الى النصف المبادل له من نظيره الذى فيه و يب يح لكان مثل ما فى القطر وكذلك كلّ سطرين بعدُهما عن الوسط بعد واحد ⟨ان⟩ كانا من سطور الطول او سطور العرض.

(*E*) فاستخرج ابن الهيثم طريقة تبادل فيها بين هذه الاعداد ليتمّ بها العدد وفقًا وهى طريقة صعبة طويلة يصعب على المتعلّم سياق ذكرها.

(*F*) ولمّا انعمتُ النظر فى طلبة طريقة تكون اسهل انفتح لى باب فى احد نوعى هذا العدد لان العدد الزوج ينقسم الى نوعين هما زوج الزوج وزوج الفرد فوقع لى طريقة فى اثبات هذا العدد فى الجداول التى قد انقسم ضلعها بعدد هو زوج الزوج لا اعرف شيئًا اسهل منها ولا اقرب مأخذًا.

سد	ب	ج	سا	س	و	ز	نز
ط	نه	ند	يب	يج	نا	ن	يو
يز	مز	مو	ك	كا	مج	مب	كد
م	كو	كز	لز	لو	ل	لا	لج
لب	لد	له	كط	كح	لح	لط	كه
ما	كج	كب	مد	مه	يط	يح	مح
مط	يه	يد	نب	نج	يا	ى	نو
ح	نح	نط	ه	د	سب	سج	ا

وهو ان نرسم مربّعًا يكون ضلعه مقسومًا بثمانية ثمّ ننقط فيه نقطاً لو توهّمنا انّنا قد اطبقنا احد نصفيه على الآخر فى طوله وعرضه لوقعت كلّ واحدة من تلك العلامات على نظيرها ولتكن هذه العلامات فى بيوت عددها عدد نصف ابيات الجدول (181[r]) كما قد عملنا بالحمرة لهذا الجدول وهو ثمانية فى ثمانية ثمّ تبدأ باثبات الواحد من الزاوية السفلى ممّا يلى اليسار وتترك على البيتين اللذين يليانه وتقول اثنين ثلثة ولا تثبت فيهما شيئًا ثمّ تأتى الى البيت الرابع والخامس فتثبت فيهما اربعة وخمسة ثمّ لا تثبت فى السادس والسابع اللذين ما فيهما علامة شيئًا لكن تذكر العدد

ذكرًا ثمّ تثبت ثمانية فى البيت الثامن ثمّ ترجع الى اوّل الصفّ الثانى ممّا يلى اليسار وليس علامة ⟨فيه⟩ فتقول تسعة ولا تثبت فيه شيئًا ثمّ تأتى الى البيتين اللذين ⟨يليانه يكون⟩ فيهما علامة فتثبت عشرة احد عشر ولا تزال كذلك الى ان تنتهى الى الزاوية اليمنى العليا فتثبت فيها اربعة وستّين ثمّ ترجع وتضع يدك على البيت الذى فيه اربعة وستّون وتقول واحدًا ثمّ تثبت فى البيتين اللذين يليانه اثنين ثلثة ثمّ تضع يدك على البيت الرابع وتقول اربعة ⟨وكذلك للبيت الخامس⟩ ثمّ تثبت فى السادس والسابع ستّة سبعة ثمّ تضع يدك على الثامن وتقول ثمانية وترجع الى ⟨اوّل الصفّ الثانى⟩ ممّا يلى اليمين وتقول تسعة وتثبتها فيها ثمّ لا تزال كذلك تعدّ العدد على الولاء وتثبت فيما لم يثبت فيه ⟨شىء⟩ الى ان تنتهى بالاربعة والستّين الى البيت الذى أُثبت فيه الواحد فاذا فعلت ذلك فقد تمّ العدد الوفق فى هذا الجدول.

فكذلك تفعل فى كلّ جدول ضلعه عدد هو زوج الزوج لانّه يمكن ان يُقسم بنصفين فى طوله وعرضه ويُقسم كلّ نصف بنصفين فينقسم بمربّعات متقابلة فيصحّ ان يُرسم فيها النقط على ما رسمنا وقد كتبنا فى البيوت التى فيها النقط بالسواد وكتبنا فى البيوت التى ما فيها ⟨النقط بالحمرة⟩ ليتبيّن ذلك ان شاء اللّه تعالى.

(G) فامّا الرسم فى المربّعات التى ⟨عدد⟩ اضلاعها هو زوج الزوج وزوج الزوج والفرد فقد رأينا ⟨رسالة⟩ للحكيم ابى حاتم مظفّر الاسفراينى رحمه اللّه وقد ذكر فيها طريقة اسهل من طريقتى الانطاكى وابن الهيثم فاثبتتُها فى هذه الرسالة اذ كان المقصود ⟨به⟩ اسهل الطرق.

فامّا زوج الزوج ⟨وزوج الزوج⟩ والفرد فان هذه ⟨المربّعات⟩ قد يمكن ان ينقسم اضلاعها باربعة اقسام فينقسم هى بستّة عشر مربّعًا متساوية البيوت فى العدد كالمربّع الذى كلّ ضلع من اضلاعه اثنا عشر بيتًا فانّه ينقسم بستّة عشر مربّعًا كلّ مربّع من ثلثة بيوت فى مثلها على هذه الصورة فينقل ما فى بيوت المربّع الاوّل الى بيوت المربّع السادس عشر كلّ سطر منه الى نظير(ه) فينقل ما فى ⟨بيت⟩ ا̅ من الاوّل الى بيت ا̅ من السادس عشر وما فى بيت ب̅ الى (181^v) بيت ب̅ وما فى بيت ج̅ الى بيت ج̅ وكذلك ينقل سطر من مربّع الى سطر هو نظيره من الآخر على التبادل ثمّ ينقل ما فى المربّع السادس الى المربّع الحادى عشر كلّ بيت الى نظيره على ما قد كتبنا بالحروف ثمّ ينقل ما فى المربّع السابع الى المربّع العاشر على شبة ما نقلنا والرابع الى مكان الثالث عشر كلّ ذلك مقلوبًا على التبادل فاذا فعلنا ذلك فقد تمّ عدد الوفق فى هذا الجدول.

ولو شئنا نقلنا الثمانية الاخرى وتركنا هذه فنقلنا الثانى الى مكان الخامس عشر والخامس عشر الى مكان الثانى والثالث الى مكان الرابع عشر والرابع عشر الى مكان الثالث ثمّ نقلنا الثامن الى مكان التاسع والتاسع الى مكان الثامن ونقلنا الثانى عشر الى مكان الخامس والخامس الى مكان الثانى عشر كلّ ذلك مقلوبًا على التبادل فيحصل العدد الوفق وذلك على ما قد رسمناه بالحمرة وهذه الطريقة عامّة فى مربّعات زوج الزوج وزوج الزوج والفرد·

(H) وعلّة ذلك ان كلّ جدول ضلعه عدد زوج فانّه اذا أُثبت فيه العدد على النظم الطبيعى من الواحد الى آخر بيت فيه فان ما يقع فى نصفى كلّ سطرين بعدُهما عن وسط المربّع بعد سواء فان مجموع ما يقع فيهما مساوٍ لعدد ما يقع فى كلّ واحد من قطرى ذلك المربّع ان كانا من سطور الطول او من سطور العرض وهذا الجدول مثال ذلك وهو من ثمانية فى ثمانية فاذا اثبتنا فيه العدد على النظم الطبيعى فان ما يقع فى القطرين يكون متساويًا ابدًا وهو فى هذا الجدول مائتان وستّون فاذا جمعنا نصف السطر الاعلى الايمن الذى فيه ا ب ج د الى نصف السطر الاسفل الايسر الذى فيه سا سب سج سد كان ذلك مائتين وستّين وان جمعنا نصف السطر

ح	ز	و	ه	د	ج	ب	ا
يو	يه	يد	يج	يب	يا	ى	ط
كد	كج	كب	كا	ك	يط	يح	يز
لب	لا	ل	كط	كح	كز	كو	كه
م	لط	لح	لز	لو	له	لد	لج
مح	مز	مو	مه	مد	مج	مب	ما
نو	نه	ند	نج	نب	نا	ن	مط
سد	سج	سب	سا	س	نط	نح	نز

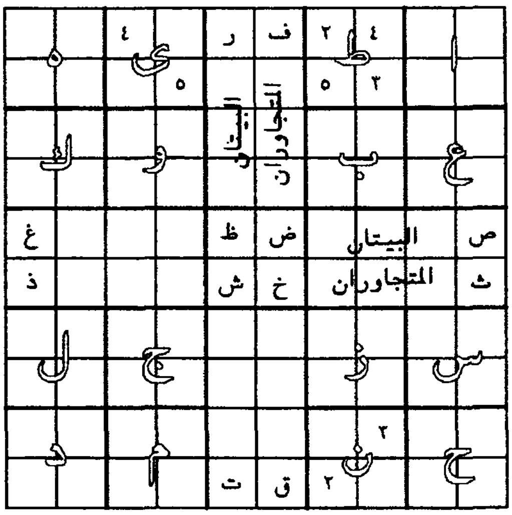
الاعلى الايسر الذى فيه ه و ز ح الى نصف السطر الاسفل الايمن الذى فيه نز نح نط س لكان مجموع ذلك مائتين وستّين هذا من سطور العرض وكذلك لو أخذنا نصف كلّ سطر من سطور العرض مع نصف نظيره الذى بعدُه عن وسط المربّع مثل بعده لوجدنا ما فيهما مائتين وستّين ثمّ لو اعتبرنا سطور الطول فأخذنا النصف الاعلى من ⟨اوّل⟩ سطور الطول الذى يلى اليمين الذى فيه ا ط يز كه مع النصف من نظيره الذى فيه م مح نو سد لوجدنا مجموع ما فيهما مائتين وستّين فبهذه الخاصّة توصّل الى ذلك الاثبات فى الجداول بأن يشرك كلّ نصف بنظيره حتّى حصل عدد الوفق فيها فليفهم ذلك ان شاء الله تعالى.

(I) فصل فى اثبات العدد فى المربّع الذى اضلاعه العدد الذى هو زوج الفرد وهذا النوع اصعب الانواع.

فاذا اردنا عدد الوفق فى جدول من جداول هذا النوع فانّا ننقص من عدد ضلع الجدول اثنين ابدًا و نحفظ الباقى ثمّ نأخذ على القطرين ثمانية مربّعات ضلع كلّ مربّع منها مثل رُبع الباقى المحفوظ فيحصل فى الجدول ستّة عشر مربّعًا متساوية الاضلاع والبيوت واربعة اسطر اثنان فى الطول واثنان فى العرض يتقاطعان على اربعة بيوت ⟨التى⟩ فى الوسط فينقل ما فى هذه المربّعات الثمانية التى على القطرين اليها على التبادل المذكور فى النوع الاوّل وهو ان ينقل ما فى كلّ مربّع فى زاوية الى المربّع الذى فى الزاوية التى تقابلها مقلوبًا وما يلى هذه ⟨على القطر⟩ الى مكان ما يلى تلك ايضاً مقلوبًا ثمّ ينقل ما فى البيوت الاربعة التى فى الوسط كلّ واحد الى ما يقابله على القطر ثمّ ينقل من كلّ واحد من السطرين طولًا وعرضاً ما فى كلّ واحد

منهما الى ما يجاوره من بيوت عددها مثل نصف عدد ضلع الجدول منقوصاً منه اثنان ابدًا ثمّ ينقل ما فى اقطار ⟨مربّعين من⟩ المربّعات الثمانية الاخر التى لم تعمل بها شيئًا الى ما يقابله طولًا وعرضاً·

ونمثّل مثالًا يسهل به الوقوف على ما وصفتُ (182r) فنأخذ جدولًا عدد ضلعه عشرة بيوت على هذه الصورة ثمّ اسقطنا من عدد ضلع الجدول وهو عشرة اثنين فبقى ثمانية فحفظناها ثمّ أخذنا على القطرين ثمانية مربّعات وهى مربّعات آ ب ج د ه و ز ح ضلع كلّ مربّع مثل رُبع الثمانية الباقية وهو اثنان فانقسم الجدول الى ستّة عشر مربّعًا الى الثمانية التى ذكرناها والى ثمانية مربّعات اخر وهى



مربّعات ط ى ك ل م ن س ع والى اربعة اسطر اثنان فى الطول وهما سطرا ف ض ق ر ش ت واثنان فى العرض وهما سطرا ث خ ذ ص ظ غ يكون تقاطعهما على اربعة بيوت وهى بيوت ض ش خ ظ فنقلنا ما فى مربّع آ الى مربّع د مقلوبًا وما فى مربّع د الى مربّع آ وما فى مربّع ب الى مربّع ج وما فى مربّع ج الى مربّع ب وما فى مربّع ه الى مربّع ح ⟨وما فى مربّع ح⟩ الى ⟨مربّع⟩ ه وما فى مربّع و الى ⟨مربّع⟩ ز وما فى مربّع ز الى مربّع و وننقل ما فى كلّ واحد من البيوت الاربعة ⟨التى فى الوسط⟩ الى ما يقابلها على القطر بأن ننقل ما فى بيت ض الى بيت ش وما فى بيت ش الى بيت ض وننقل ما فى بيت خ الى

بيت ظ وما فى بيت ظ الى بيت خ ثمّ ننقل ما فى ثلثة بيوت الى ما يجاورها على البدل من كلّ واحد من سطرى الطول والعرض وهى البيوت التى مكتوب عليها البيتان المتجاوران هذه البيوت بعينها او ما شئنا من البيوت فى ذينك السطرين سوى الاربعة البيوت التى فى الوسط المفروغ منها وذكرنا ثلثة بيوت لا غير لاجل ان نصف عدد ضلع هذا الجدول اذا نُقص منه اثنان بقى ثلثة ليكون العمل على ما ذكرنا من ان ينقل نصف كلّ ما فى سطر الى مكان نصف السطر الذى بعدُه عن الوسط بعدُ المنقول منه الذى هو عمدة الوفق واذا كان الجدول اكبر او اصغر من هذا الجدول فكان الباقى من نصف ⟨عدد الضلع⟩ اذا نقصت منه اثنين اكثر او اقلّ من ثلثة فانّا ننقل مثل ذلك الباقى بعضها الى بعض ثمّ ننقل ما فى بيوت القطر الاوّل من مربّع ⟨ط الى بيوت القطر من مربّع ي وننقل ما فى بيوت القطر الثانى من مربّع ط الى بيوت القطر من مربّع⟩ ن وننقل ما فى بيوت القطر الاوّل من مربّع ع الى بيوت القطر من مربّع س وننقل ما فى بيوت القطر الثانى من مربّع ع الى القطر من مربّع ك وما فى كلّ واحد من المنقول اليه الى المنقول منه على التبادل وقد رسمنا على البيوت بحروف الهند لتكون علامة فننقل ما فى بيت ٢ الى بيت ٢ وما فى بيت ٣ الى بيت ٣ وعلى هذا القيس كلّها فاذا فعلنا ذلك وفرغنا من جميعها على الشرائط المذكورة فقد تمّ العمل وحصل جداول الوفق من هذا النوع ان شاء الله تعالى.

وحده الحمد لله ربّ العالمين وصلى الله على محمّد وآله اجمعين. فرغ من تحريره فى العشر الاوّل من صفر سنة سبع وثمانين وخمسمائة ابرهيم بن الحسين الرويانى فى دار الكتب المنسوب الى عبد الرحمن بن عبد الله.

(Received: July 21, 2003)